

Historische Entwicklung von Näherungsverfahren  
zur Lösung algebraischer Gleichungen

**DISSERTATION**

Zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktors der Naturwissenschaften

des Fachbereichs Mathematik

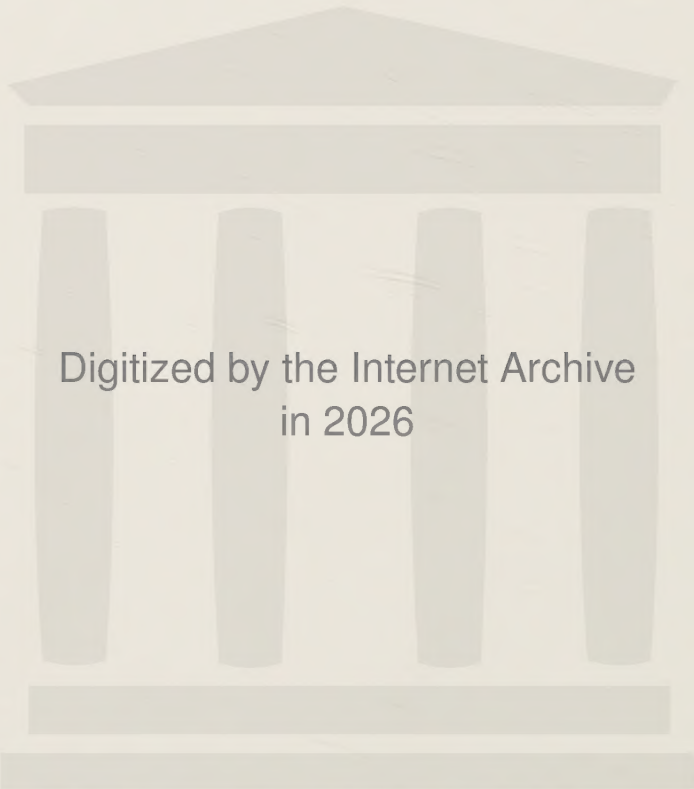
der Ludwig-Maximilians-Universität

München

vorgelegt von Engelbert Huber

aus Unterschleißheim

eingereicht im Juni 1978



Digitized by the Internet Archive  
in 2026





Historische Entwicklung von Näherungsverfahren  
zur Lösung algebraischer Gleichungen

**DISSERTATION**

Zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktors der Naturwissenschaften

des Fachbereichs Mathematik

der Ludwig-Maximilians-Universität

München



vorgelegt von Engelbert Huber

aus Unterschleißheim

eingereicht im Juni 1978

# D I S S E R T A T I O N

zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktors der Naturwissenschaften

des Fachbereichs Mathematik

der Ludwig-Maximilians-Universität München

1. Referent : Professor Gericke

Korreferent : Professor Hämmerlin

Tag der mündlichen Prüfung: 23. November 1978



vergeben von: Dr. J. H. J. van der Meer

aus: Bibliothek

eingetragen am: 1. Juni 1979

## Inhaltsübersicht

|      |                                                                                     |     |
|------|-------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| I    | Vorbemerkungen                                                                      | 3   |
| II   | Vorstufen der Näherungsverfahren                                                    | 5   |
| III  | Doppelter Falscher Ansatz - Lineare Interpolation                                   | 9   |
| IV   | Intervallschachtelung                                                               | 13  |
| V    | Iterationsverfahren für spezielle Gleichungsformen                                  | 14  |
| VI   | Verfahren der Nullpunktverschiebung                                                 |     |
|      | 1. Das Verfahren von François Viète                                                 | 17  |
|      | 2. Das Verfahren von Isaac Newton ( 1634 - 1727 )                                   | 25  |
|      | 3. Das Horner - Schema                                                              | 33  |
|      | 4. Das Näherungsverfahren mit Hilfe von Kettenbrüchen                               | 44  |
| VII  | Berechnungen der Potenzen der Gleichungswurzeln und<br>daraus abgeleitete Verfahren |     |
|      | 1. Bernoulli - Verfahren mit rekurrenten Folgen                                     | 50  |
|      | 2. Gräffe - Methode der quadrierten Wurzeln                                         | 66  |
| VIII | Verfahren zur Bestimmung der oberen und unteren Grenzen<br>der Wurzeln              | 76  |
| IX   | Spezielle Entwicklungen im 19. Jahrhundert                                          | 96  |
| X    | Zusammenfassung                                                                     | 107 |
| XI   | Literaturverzeichnis                                                                | 111 |

## I. Vorbemerkungen

Betrachtet werden die im Laufe der Geschichte entwickelten Methoden eine Gleichung der Form

$$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i = 0$$

bei gegebenen reellen  $a_i$  numerisch approximativ zu lösen. Die Gleichungen werden in der heute üblichen Schreibweise wiedergegeben, nur wo der Gedankengang des betreffenden Mathematikers durch dessen eigene Form leichter ausgedrückt werden kann, wurde diese belassen.

Auf geometrische Lösungen, die im Rahmen der Zeichengenauigkeit exakt sind, wird nicht ausführlich eingegangen. Die Verfahren der Nomographie blieben unberücksichtigt. Manche der für algebraische Gleichungen entwickelten Methoden sind auch auf transzendente Gleichungen anwendbar; das wird aber nur gelegentlich erwähnt.

Ziel ist nicht nur eine Sammlung aller in der Geschichte aufgetretenen Verfahren, sondern ihre Gliederung nach den zugrunde liegenden Prinzipien. Dabei wird das erste Auftreten und die Entwicklung bis zur ersten vollständigen Darlegung der Theorie untersucht. Bis zu Anfang des 19. Jahrhunderts waren für die meisten Verfahren die theoretischen Grundlagen auch erarbeitet. Deshalb ist auch die Beschränkung auf die Zeit vor der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts gerechtfertigt. Nur an wenigen Beispielen wird über diesen Zeitraum hinausgegangen, obwohl gerade in dieser Epoche wegen des raschen Fortschritts in Naturwissenschaften und Technik eine Fülle von Arbeiten über numerische Mathematik erschienen sind. Hier verweise ich auf die Literatursammlung von Wölfling [W 7]<sup>+)</sup> und von Mathiessen [M 2].

Als erste Informationsquelle darüber, was an Original- und Sekundärliteratur vorhanden ist, hat Tropfke, Geschichte der Elementarmathematik [T 2] zur Verfügung gestanden. Tropfke hat eine Materialsammlung geschrieben, keine Ideengeschichte. Sehr viel umfassender ist eine Arbeit von Cajori [C 2] von 1910. Wenn gleich hier mehr auf Hypothesen über den historischen Verlauf eingegangen wird, leistet diese Abhandlung keine Gliederung nach mathematischen Gesichtspunkten. Auch wird auf die mathematischen Grundlagen nicht in dem Maße eingegangen, wie in der vorliegenden Schrift.

<sup>+) Siehe Literaturverzeichnis unter W, 7. Werk</sup>

Neuere Forschungsergebnisse über die Mathematik der Babylonier, Ägypter, Chinesen und Araber des Mittelalters fehlen sowohl bei Tropfke, als auch bei Cajori.

Das älteste von mir benutzte Werk, das auf historische Bezüge verweist, ist die *Traité de la Résolution des Equations numériques* von Lagrange, 1798 [L 3]. Sehr ausführlich werden hier die historischen wie mathematischen Zusammenhänge einiger Näherungsmethoden dargelegt, besonders die von Isaac Newton und Daniel Bernoulli (siehe dort).

Während der Fertigstellung des Manuskripts ist von H.H. Goldstine das Buch "A History of Numerical Analysis from the 16th through the 19th Century" erschienen [G 10]. Darin wird kurz das Verfahren von Newton und Viète angesprochen (S. 64 - 68) und ein Beitrag Cauchys zum Newton - Raphson - Verfahren wiedergegeben (S. 278 - 280).

Man gewinnt sehr leicht den Eindruck, daß die Behandlung von Näherungsverfahren im 19. Jahrhundert hauptsächlich in Frankreich, England oder im deutschsprachigen Raum stattgefunden habe. Auch in Italien, Rußland oder Skandinavien finden sich nennenswerte Untersuchungen, aber die Quellenlage hat es mir nicht erlaubt gründlich die dort publizierten Arbeiten durchzusehen. Hier konnte nur Sekundärliteratur herangezogen werden.

Die Vorliegende Arbeit strebt Vollständigkeit in der Vorstellung solcher Veröffentlichungen an, in welchen ein bestimmter Fortschritt für ein Verfahren erkennbar ist und versucht dies mathematisch zu analysieren. Dafür werden eine Reihe von Arbeiten, welche ein bestimmtes Verfahren lediglich benutzen, unberücksichtigt gelassen, es sei denn, durch die Art und Weise der Anwendung ging ein Impuls für die Weiterentwicklung der Methode selbst aus.

## II. Vorstufen der Näherungsmethoden

Die ersten Näherungswerte, deren Berechnung geschichtlich belegbar ist, hatte man für die Kreiszahl  $\pi$  und für Wurzeln. Aus den Verfahren für die Wurzelbestimmung haben sich dann auch die Ansätze für die Weiterentwicklung von Näherungsverfahren bei allgemeinen Gleichungen finden lassen.

Für  $\sqrt{2}$  fand man bei den Babyloniern eine erstaunlich gute Näherung. Aus einer nur stückweise erhaltenen Tabelle für sexagesimal geschriebene Quadratzahlen,

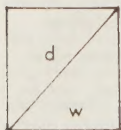
| x    | $x^2$   |                |
|------|---------|----------------|
| 1    | 1       |                |
| 1;5  | 1;10,25 |                |
| 1;10 | 1;21,40 |                |
| 1;15 | 1;33,45 | [N 1; III, 51] |

<vermutliche Forts.      1;20      1;46,40  
                                  1;25      2;0,25 > +)

konnte man leicht erste Näherungen finden.  $1;25 = 1 \cdot 60^0 + 25 \cdot 60^{-1} = 1,41\bar{6}$   
 und  $1;25^2 = 2;0,25 = 2 \cdot 60^0 + 0 \cdot 60^{-1} + 25 \cdot 60^{-2} = 2,013\bar{8}$ .

Der ebenfalls überlieferte Wert 1;24,51,10 [Neugebauer, O. und Sachs, A., Mathematical Cuneiformtexts, New Haven, 1945, S.42] könnte also aus einer Verbesserung der 1. Näherung stammen:

Der Pythagoräische Lehrsatz war, wie aus der Aufgabe die Diagonale eines Rechtecks zu bestimmen ersichtlich ist [N 1; II, 53], den Babyloniern bekannt,



$d = \sqrt{h^2 + w^2}$ . Als Näherungswert benützte man

$$\sqrt{h^2 + w^2} \approx h + \frac{w^2}{2h}$$

Diese Formel könnte so entstanden sein, (wobei man berücksichtigen muß, daß noch keine algebraische Schreibweise in unserem Sinne existierte):

$$d = h + r \Rightarrow h^2 + w^2 = (h + r)^2 \Rightarrow h^2 + w^2 = h^2 + 2hr + r^2$$

Unter Vernachlässigung von  $r^2$  ergibt sich die lineare Gleichung  $r \approx \frac{w^2}{2h}$ .

<sup>+) In spitzen Klammern stehen Ergänzungen, die nicht im Original enthalten sind.</sup>

Wendet man diese Rechenvorschrift auf  $h = 1;25$  an, so gilt für  $\sqrt{2}$

$$r = -0; 0, 8, 49, 12$$

und

$$\begin{aligned}\sqrt{2} &= 1;25 + r = 1;24,51,10,48 \\ &= 1,41421\bar{6} \text{ (dezimal, auf 5 Stellen richtig).}\end{aligned}$$

Mit nur einem Iterationsschritt war diese Verbesserung möglich.

Später in der Geschichte wird diese Formel immer wieder benutzt und zum Teil auch etwas abgewandelt. So tritt sie uns bei Heron von Alexandria (um 75 n.Ch.) entgegen, wird von den indischen Mathematikern, z.B. Aryabhata I (geb. 467) und Brahmagupta (geb. 598), zusammen mit der Formel

$$\sqrt[n]{a} = h + \frac{a - h^n}{nh^{n-1}} \quad [D 3]$$

verwendet und gelangt über die Araber des Mittelalters mit weiteren Varianten versehen ins Abendland. Der Grundgedanke blieb derselbe. Sei  $h$  eine (zu kleine) Näherungslösung der Gleichung  $x^n = a$ , so kann man die richtige Lösung in der Form  $x = h + r$  ansetzen und erhält zur Bestimmung von  $r$  die Gleichung

$$h^n + nh^{n-1}r + (\text{höh. Terme von } r) = a,$$

also, unter Vernachlässigung höherer Terme von  $r$ :  $r = \frac{a - h^n}{nh^{n-1}}$ .

Damit ist gezeigt, daß der Gedanke, eine nichtlineare Gleichung näherungsweise durch eine lineare zu ersetzen schon sehr alt ist. Er wird uns noch vielfach begegnen.

Um zu radizieren kannte man auch noch andere Formen, deren Prinzip ebenfalls in einer Linearisierung besteht. Mit Hilfe eines Rechenweges, der sich als Horner-Schema interpretieren läßt und auch in der äußeren Form Ähnlichkeiten damit aufweist, war es den frühen chinesischen Mathematikern ca. 200v.Ch. möglich Wurzeln zu ziehen (siehe S. 33). Der Quotient  $r$ , welcher zur ersten Näherung  $h$  addiert wird, läßt sich leicht mit diesem Schema berechnen, weil nicht potenziert werden muß. Außerdem treten nur Additionen und Multiplikationen mit einstelligen Faktoren auf [V 4].

Ohne daß man einen Weg dieses Schemas von China in den vorderen Orient nachweisen kann, wird das jetzt noch deutlicher als Horner-Schema erkennbare Hilfsmittel bei den Arabern fast ausschließlich zum Radizieren herangezogen.

In Indien hingegen stützte man sich beim Radizieren auf den Binomischen Lehrsatz, was zwar das gleiche Ergebnis liefert, aber andere Rechenschritte erfordert. Diese Form des Wurzelziehens wird auch die für das Abendland geläufige. Gerade deshalb darf man in ihr den Ursprung des Newton - Raphson - Verfahrens sehen. Der Übergang von der Radiziermethode zu einem Näherungsverfahren für algebraische Gleichungen wurde von François Viète vollzogen [V 1; 163 ff]. Deshalb sei hier zunächst ein Beispiel für das Radizieren bei Viète angeführt. Es lautet:  $x^2 = m = 574\,564$ ; man sieht sofort, daß die Wurzel dreistellig sein wird. Deshalb kann man setzen:

$$x = \sqrt{m} = \sqrt{(100u+10v+w)^2} = \sqrt{(100u)^2 + (200u+10v) 10v + (200u+20v+w) w}.$$

Dabei ist es unerheblich, ob  $10v+w = 10v_0$  gesetzt wird, also  $m = 100u + 10v_0$ , weil dadurch im zweiten Summanden unter dem Wurzelzeichen statt  $v$  nun  $v_0$  stünde und der dritte Summand wegfiel. Dieser dritte Summand bleibt aber beim ersten Näherungsschritt ohnehin außer Acht.

Man such zunächst  $u$  so, daß  $(100u)^2 \leq m \leq (100(u+1))^2$ , und erhält  $u = 7$ , also  $(100u)^2 = 490\,000$ . Den Rest  $m - (100u)^2 = 84\,564$  hätte man durch  $200u + 10v$  zu dividieren, um  $10v$  zu erhalten. Viète ersetzt ohne Begründung  $v$  durch 1 und erhält

$$\frac{84\,564}{200u + 10} \quad \langle \approx 59,9 \rangle$$

Nun darf man hier nicht nach oben runden, weil ja noch ein bisher vernachlässigtes Glied fehlt. Da  $v$  nur einziffrig ist, und der Quotient zwischen 50 und 60 liegt, wird  $10v = 50$  genommen.

$$84\,564 - (200u + 10v) 10v = 12\,064$$

ist der neue Rest, aus dem durch Division

$$w = \frac{12\,064}{200u + 10v + 1} \quad \langle \approx 8,03 \rangle \approx 8$$

gefunden wird. Da der Divisor zu klein war (für  $w$  wurde zuerst 1 gesetzt), muß der Quotient nach unten abgerundet werden:  $\sqrt{574\,564} = 758$ .

Die nächsten Stellen erhält man also durch weitere Quotientenbildung unter Vernachlässigung der Übermächsten Stelle. Müßte man noch weitere Stellen berechnen, so käme jetzt

$$(200u + 20v + 2w + 10^{-1}w') 10^{-1}w', \text{ usw. .}$$

Neben dem Radizieren gab es noch eine weitere Vorstufe, welche zu einem Näherungsverfahren allgemeiner Art ausgebaut wurde, nämlich den "Falschen Ansatz".

Hat man etwa die Aufgabe "  $\frac{2}{3}$  hinzu,  $\frac{1}{3}$  weg, 10 ist der Rest " , wie sie die Aufgabe 28 im Papyrus Rhind ( 17. Jh. v. Ch. ) darstellt und modern

$$x + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}\left(x + \frac{2}{3}x\right) = 10$$

geschrieben wird, so kann man sie ohne algebraische Umformung durch Einsetzen einer Versuchszahl  $x_0$  lösen. Wenn  $x_0$  nicht zufällig die richtige Lösung ist, so wird eine von 10 verschiedene Zahl  $y_0$  herauskommen. Aus der Proportion

$$\frac{x}{x_0} = \frac{10}{y_0}$$

kann  $x$  bestimmt werden.

Derartige Dreisatzaufgaben dürften den Ägyptern geläufig gewesen sein, wie man aus solchen Aufgaben ersieht: Aus 3 Scheffeln Korn werden 101 Bier gebraut. Wieviel Bier erhält man aus 7 Scheffeln?

Man kann auch so vorgehen: Es sei  $f(x) = c$  zu lösen. Wir wählen probeweise zwei Werte  $x_1$  und  $x_2$ , für die  $f(x_1) < c$  und  $f(x_2) > c$  wird. Der richtige Wert  $x$  liegt dann zwischen  $x_1$  und  $x_2$ . Nun hat man zwei Möglichkeiten. Man überlegt sich, daß

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{|f(x_1) - c|}{|f(x_2) - c|}.$$

Daraus läßt sich  $x$  wiederum exakt bestimmen, wenn  $f(x)$  linear ist. Wenn dieses Verfahren, der " doppelte falsche Ansatz " , auf nichtlineare Aufgaben angewandt wird, ergibt sich nicht die Lösung, wohl aber ein besserer Näherungswert und bei Fortsetzung eine Intervallschachtelung. Jedoch ist der doppelte falsche Ansatz auch anwendbar, wenn die Lösung nicht zwischen den Versuchszahlen liegt. Das wird im folgenden Kapitel genauer ausgeführt.

Zu den Vorstufen wäre wahrscheinlich auch eine Methode zu rechnen, die al - BIRÜNİ ( 973 - 1048 ) bei der Lösung der Gleichung

$$x^3 = 1 + 3x$$

verwendet und *istikrā'* nennt. Wörtlich sagt er [A 4; 260]: "... es gibt kein anderes Verfahren als *istikrā'*". Dann gibt er die Lösung auf vier Sexagesimalstellen genau an,  $x = 1;52,45,47,13 <= 1,879385103\dots>$ . *istikrā'* bedeutet sammeln, Stück für Stück zusammenholen oder aus Tabellen herauslesen. Dabei könnte es sich sowohl um Potenztabellen, als auch um trigonometrische Tafeln handeln, denn  $x$  ist von der Aufgabe her die Sehne zu einem Kreisbogen von  $40^\circ$  [A 3; 19].

### III. Doppelter falscher Ansatz - Lineare Interpolation

Was wir heute als lineare Interpolation bezeichnen, gründet sich historisch auf den doppelten falschen Ansatz, der später in die Literatur als "regula falsi" eingegangen ist.

Sei  $f(x) = c$  die zu lösende Gleichung und seien  $x_1, x_2$  zwei Versuchszahlen. Die zugehörigen Funktionswerte sind dann  $f(x_1) = c_1$  und  $f(x_2) = c_2$ . Man kann sich dann überlegen, daß (bei nichtlinearen Gleichungen näherungsweise) die Differenz der Funktionswerte proportional der Differenz der Argumentwerte sein wird. Das läßt sich auf zweifache Weise auswerten:

$$(1) \quad \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \quad \text{oder}$$

$$(2) \quad \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

Wenn man in einem kartesischen Koordinatensystem den Graphen der Funktion  $f$  zeichnet, läßt sich das aus dem Strahlensatz ableiten. Aber die Methode des doppelten falschen Ansatzes wurde schon lange vor der Erfindung des Koordinatensystems geübt.

Schon die Babylonier haben sie bei einer Zinseszinsaufgabe angewandt, welche aber auf eine transzendente Gleichung hinausläuft. Gegeben ist der Zinsfuß  $p$ ; gefragt wird, wann sich das Anfangskapital verdoppelt hat. In unserer Darstellung hieße die Gleichung  $(1 + p)^x = 2$ .

Es ist jedoch nicht sicher, ob nicht von vorneherein das Anwachsen des Kapitals innerhalb eines Jahres als linear betrachtet wurde [N 1; II, 40].

In China tritt die Methode des doppelten falschen Ansatzes in den auf das 2. Jh. v. Ch. zurückgehenden "Neun Büchern arithmetischer Technik" unter der Aufgabenbezeichnung "Überschuß und Fehlbetrag" auf [V 4; Buch 7]. Wie bei den Babyloniern werden auch hierin transzendente Probleme gelöst. Aber auch hier könnten diese als stückweise linear angesehen worden sein.

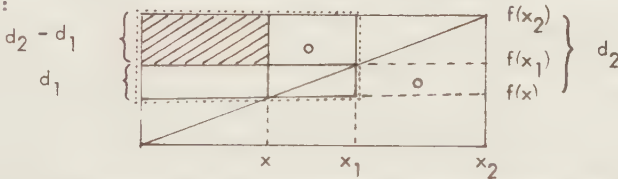
In Formel (1) ergibt sich  $x$  folgendermaßen:

$$x = \frac{x_1 (f(x_2) - f(x)) - x_2 (f(x_1) - f(x))}{f(x) - f(x_1) - (f(x) - f(x_2))} =: \frac{x_1 d_2 - x_2 d_1}{d_2 - d_1}.$$

Für diese Formel hat der Araber Qusta ibn Lūqā (gest. 912) einen geometrischen Beweis gegeben [S 15; 114 ff]. Da er keine negativen Zahlen zuläßt, muß er drei Fälle unterscheiden, wovon ich nur einen als Beispiel dieser Beweisart wiedergebe. Der Graph der linearen Gleichung  $f(x) = c$  wird durch die Diagonalen derjenigen Rechtecke markiert, deren Seitenverhältnis

$$x : f(x) = x_1 : f(x_1) = x_2 : f(x_2)$$

ist. (Bei den Arabern des Mittelalters existiert noch kein Koordinatensystem in unserem Sinne). Es soll gezeigt werden, daß die Formel auch gilt, wenn  $f(x) < f(x_1) < f(x_2)$  (Extrapolation). In folgenden Rechtecken gelten die Beziehungen:



$x \cdot (d_2 - d_1)$  ist das schraffierte Rechteck,  $x_1 d_2$  das umrandete. Die Differenz, die Gnomonfigur, ist wegen der Gleichheit der mit  $\circ$  bezeichneten Rechtecke flächengleich dem Streifen  $x_2 d_1$ . Also  $x \cdot (d_2 - d_1) + x_2 d_1 = x_1 d_2$  und

$$x = \frac{x_1 d_2 - x_2 d_1}{d_2 - d_1}.$$

Es werden ausdrücklich nur lineare Probleme mit, wie er sagt "ḥisāb al - chata'ain" (= Rechnung der beiden Fehler) gelöst. Für Wurzeln kennt man ein eigenes Verfahren, das schon erwähnte Horner - Schema, angewandt auf die Gleichung  $x^n - c = 0$ . Quadratische Gleichungen werden algebraisch aufgelöst und kubische mit Kegelschnitten gelöst [S 15; 112 f].

Möglicherweise hat Leonarde von Pisa (ca. 1180 - 1250), den wir als Mittler zwischen der arabischen und der abendländischen Mathematik betrachten dürfen, den doppelten falschen Ansatz für Gleichungen höheren Grades angewandt [G 4]. In der "Practica geometriae" (1220) wird eine Gleichung dritten Grades bearbeitet. Als Lösung für

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 20 \quad [L 7; II, 228 ff]$$

gibt Leonardo, ohne den Rechengang zu erläutern, den bis in die sechste

Sexagesimalstelle richtigen Näherungswert  $1;22, 7,42,33, 4,40 \leftarrow 1,369\,142\,236\dots$  an. Obwohl Leonardo den falschen Ansatz kennt und häufig benutzt, und auch die schon bei den Babyloniern aufgetretene Näherungsformel für Wurzeln (siehe S. 5) von ihm angewandt wird, bleibt noch die Möglichkeit, daß die Lösung durch mehr oder weniger gezieltes Probieren gewonnen wurde.

Rainer Gemma Frisius (1508 - 1555) hat versucht, die regula falsi auf nichtlineare Gleichungen auszudehnen, um auch dafür exakte Lösungen zu erhalten. Das gelang natürlich in zwei Fällen, nämlich für Gleichungen der Form  $ax^2 = c$  und  $ax^3 = c$ ; sie können als lineare Gleichungen in  $x^2$  bzw. in  $x^3$  aufgefaßt werden. Tatsächlich berechnet Gemma Frisius mit der regula falsi  $x^2$  bzw.  $x^3$  und zieht danach die Wurzel  $[G\,2; 103]$  bzw.  $[G\,2; 109]$ . Ein Beispiel lautet so:

Gegeben ein Rechteck mit der Fläche  $c = 200$  Quadratellen, sowie die Länge  $l = \frac{3}{2} \cdot \text{Breite } b$ . Gesucht sind  $l$  und  $b$ , was gleichbedeutend mit  $y = ax$  und  $xy = c$  ist. Daraus ergibt sich  $ax^2 = c$ . Für die Breite  $b$  nimmt er die Versuchszahlen  $b_1 = 4$  und  $b_2 = 20$ ,  $\Rightarrow c_1 = 24$  und  $c_2 = 600$ . Mit  $c - c_1 = -d_1$  und  $c_2 - c = d_2$  setzt er:

$$x = \sqrt{\frac{x_1^2 d_2 - x_2^2 d_1}{d_2 - d_1}} = \sqrt{\frac{16\,400 + 400\,176}{400 + 176}} = \sqrt{133\frac{1}{3}}.$$

Die im Laufe der Mathematikgeschichte bekannt gewordenen algebraischen Auflösungen von Gleichungen haben die regula falsi für lineare Probleme unbedeutend werden lassen.

Über die Vorstufen ist Geronimo Cardano (1501 - 1576) hinausgegangen. Bei seiner "regula aurea" in der 1545 erschienenen *Ars magna* ist nicht nur die Anwendung des doppelten falschen Ansatzes im Sinne der linearen Interpolation bemerkenswert, sondern auch die Tatsache, daß diese zu einem für jeden Grad anwendbaren Iterationsverfahren führte, und Cardano dies auch besonders hervorhebt: "... residuum est aestimatio rei valde proxima, cui per iteratas operationes semper propinquius licet accedere. Idem fiet, ubi aequatio sit denominationis aliquicue, ad numerum, ac denominationes, ut in exemplis patebit."  $[C\,6; 30,273\,f]$   $\leftarrow$  ... ergibt sich eine sehr nahe Schätzung des wahren Wertes, welchem man durch wiederholte Operationen immer näher kommen kann. Dasselbe wird geschehen, sobald Gleichheit besteht zwischen irgend einer Potenz  $\leftarrow$  der Unbekannten  $\rightarrow$  zu einer Zahl und  $\leftarrow$  zu anderen  $\rightarrow$  Potenzen, wie es in den Beispielen offenkundig wird."  $\rightarrow$

Sei die vorgelegte Gleichung  $f(x) = c$  und  $x_1, x_2$  beide Versuchszahlen mit  $x_1 = x_2 + 1$  und  $f(x_2) = c_2 < c < c_1 = f(x_1)$ . Wäre  $f(x)$  linear, so wäre

$$\frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = \frac{c - c_2}{c_1 - c_2}, \text{ also, wegen } x_1 - x_2 = 1: \quad x = x_2 + \frac{c - c_2}{c_1 - c_2} =: x_3$$

die gesuchte Lösung. Statt  $x_2$  wird nun für nichtlineare  $f(x)$  das  $x_3$  eingesetzt und ein neuer Näherungswert gefunden. Der zu große Näherungswert  $x_1$  wird beibehalten, so daß die Annäherung nur von einer Seite erfolgt. Die Iterationsformel, welche sich daraus ergäbe und bei Cardano nicht explizit dasteht, lautet:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{(x_1 - x_n)(c - c_n)}{c_1 - c_n}$$

weil jetzt  $x_1 - x_n \neq 1$ . Cardano brachte nur Beispiele bis zum vierten Grad, während der Schweizer Astronom und Mathematiker Jost Bürgi (1552 - 1632) mit der seit Cardano echt als lineare Interpolation zu bezeichnende regula falsi, eine bei der Berechnung der Neuneckseite auftretende Gleichung vom achten Grad löst. Bürgi verwendet aber stets zwei neue Näherungswerte im Gegensatz zu Cardano, der einen Wert festhielt.

Für einen umschriebenen Kreis mit Radius 1 wird die Sehne  $x$  des halben Bogens über einer gegebenen Sehne  $a$  mit Hilfe des Hypothenusen- und Höhensatzes aus  $a^2 = 4x^2 - x^4$  gefunden. Dann findet er nach einem Satz über Sehnenvierecke die Sehne  $x$  des Drittelbogens über einer gegebenen Sehne  $a$  aus  $a = 3x - x^3$ . Mit diesen beiden Teilungen kann er jede Sehne, also insbesondere die Seite des Neunecks berechnen. Dazu benützt er vorgefertigte Gleichungstabellen [W 8; 17 u. 22], [B 5].

$$f(x) = 9 - x^2 (30 - x^2 (27 - x^2 (9 - x^2)))$$

ist die gesuchte Gleichung. Durch graphische Versuche wird die Wurzel zwischen 0,68 und 0,69 eingegrenzt. Bezeichnet man sie mit  $x_1$  und  $x_2$  und bildet die Differenzen  $f(x_1) - f(x_2)$  und  $x_1 - x_2$ , so ergibt sich sofort die Näherung nach Formel (2) von Seite 9.

Genauso wie Bürgi rechnet auch Pitiscus (1561 - 1613) in seiner Trigonometria von 1612 [P 2; 44 ff].

## IV. Intervallschachtelung

Beim Verfahren des doppelten falschen Ansatzes wurde auf die Möglichkeit einer Intervallschachtelung schon hingewiesen. Bei Jost Bürgi war dies der Fall. Hier sollen aber zwei Verfahren vorgestellt werden, welche das eher zufällige Probieren systematisieren und dadurch eine Wurzel immer weiter einengen.

Bei dem in Lyon wirkenden Mediziner Nicolas Chuquet (gest. um 1500) finden wir in dessen "Triparty" von 1484 folgende in Worten wiedergegebene Gleichung [C 9; 653 f] :

$$x^2 + 8x = 39\frac{13}{81}.$$

seien  $x_1 < x < x_2$  zwei positive Versuchszahlen, die die Wurzel  $x$  eingrenzen. Chuquet schreibt sie als Brüche, also

$$x_1 = \frac{a_1}{b_1} \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{a_2}{b_2}$$

und als Mittelwert bildet er

$$m_1 = \frac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2}.$$

Daß dieser Zwischenwert innerhalb des Intervalls  $[x_1, x_2]$  liegt, kann man so zeigen (nicht bei Chuquet):

Unter der Voraussetzung, daß  $\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_2}{b_2}$  gilt  $a_1 b_2 < a_2 b_1$  und

$a_1 b_1 + a_1 b_2 < a_1 b_1 + a_2 b_1$ , und das ist Äquivalent zu  $\frac{a_1}{b_1} < \frac{a_1 + b_2}{b_1 + b_2}$  ;

analog ergibt sich  $\frac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2} < \frac{a_2}{b_2}$ .

Liegt die Wurzel noch zwischen  $m_1$  und  $\frac{a_2}{b_2}$ , was man jeweils verifizieren muß, folgen nach und nach für  $m_i$  die Werte:

$$m_i = \frac{a_1 + i a_2}{b_1 + i b_2}, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

welche gegen  $\frac{a_2}{b_2}$  streben. Es muß demnach ein Paar  $m_i, m_{i+1}$  geben, das den wahren Wurzelwert einschließt. Im vorliegenden Beispiel ergibt sich nach vier Schritten die rationale Wurzel  $5\frac{7}{9}$ . Ein ähnlich gebildeter Mittelwert tritt schon bei Pappos von Alexandria (um 320 n. Ch.) auf [P 1; 689].

In seinem 1594 gedruckten Anhang zu "L'Arithmetique" von 1585 bedient sich Simon Stevin (1548 - 1620) einer Intervallschachtelung um eine Gleichungswurzel zu finden [S 12; 351-355]. In der aufgestellten Gleichung

$$x^3 = 300x + 33\,915\,024$$

schätzt er den ganzzahligen Anteil der Wurzel ab, indem er der Reihe nach  $10^n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  einsetzt. Er findet im Beispiel eine Hunderterzahl, deren erste Ziffer durch Eingrenzung mit  $100r$ ,  $r = 2, 3, 4, \dots, 9$ , bestimmt wird. Ist die erste Ziffer damit bekannt, gelangt man analog zu den folgenden Ziffern, auch nach dem Komma. Interessant wird das vor allem, seit Stevin Dezimalbrüche eingeführt hat. Früher rechnete man gelegentlich so:

Um  $\sqrt[n]{2}$  zu finden, berechnet man  $\sqrt[n]{2 \cdot 10^{2n}} = w$ ; dann wird  $\sqrt[n]{2} = \frac{w}{10^n}$

[Simon Stevin; De Thiende, Ostw. Klass. Nr 1, n.F., Einleitung].

## V. Iterationsverfahren für spezielle Gleichungsformen

Schon sehr früh in der Geschichte treten Iterationsverfahren auf, für die eine bloße Umstellung einer Gleichung nach  $x = \bar{f}(x)$  nötig war. Gelegentlich lagen die Aufgaben bereits so vor. Beispiele für diese Iterationen finden sich bei den Arabern und den Chinesen und in jüngerer Zeit z.B. bei Kepler, Bürgi und Fourier.

In China war die gängige Methode für Näherungsrechnungen die Zuhilfenahme des Horner-Schemas. Dennoch findet man im 13. Jh. bei Ch'in Chiu-shao oder bei Li Yeh, nach [H 7; I, 77], die kubische Gleichung  $x^3 + x = 1$  iterativ nach der oben genannten Form gelöst:

$$x_{n+1} = \frac{1}{1 + x_n^2}.$$

Wird für  $x_0 = 0,7$  genommen und werden zunächst nur Hundertstel bei den Rechnungen berücksichtigt, so erreicht man nach siebenmaliger Wiederholung, was in dieser Gleichung nicht viel Mühe bereitet, schon eine Genauigkeit auf drei Dezimalen. Zudem kann bei jedem Schritt die Genauigkeit leicht festgestellt werden um die Korrekturen besser abzuschätzen.

Die rasche Konvergenz dürfte auch der Grund für den arabischen Mathematiker al-Kāshī gewesen sein, auf die Winkeldreiteilungsgleichung  $p x - x^3 = q$ , das Iterationsverfahren

$$x_{n+1} = \frac{q + x_n^3}{p}$$

anzuwenden [A 1], [J 2; 322 f] und nicht die ihm vermutlich bekannte Methode mit dem Horner-Schema (siehe S. 36).

Miriām Chelebi (gest. um 1524), ein arabischer Astronom, Enkel von al-Kāṣī, hat ein von seinem Großvater stammendes Verfahren zur Berechnung von  $\sin 1^\circ$  gegeben, das auf die Lösung der kubischen Gleichung

$$x^3 + q = p \cdot x, \text{ also } x = \frac{q + x^3}{p},$$

hinausläuft [J 2; 312 f]. Da man von vorneherein weiß, daß die gesuchte Wurzel sehr klein ist, vernachlässigt man  $x^3$  und wählt als erste Näherung  $x_1 = \frac{q}{p}$ .

Die zweite Näherung  $x_2$  erhält al-Kāṣī aus

$$x_2 = \frac{q + x_1^3}{p}$$

und die weiteren aus

$$x_{n+1} = \frac{q + x_n^3}{p}.$$

Dieses Iterationsverfahren verrät vielleicht chinesischen Einfluß, ist aber vorerst nicht zu belegen (vgl. auch [L 13; 261-267]).

Über die Frage der Konvergenz spricht al-Kāṣī bzw. Chelebi natürlich nicht. In ihrem Fall ist aber  $x_5$  ein bereits auf Quarten im Sexagesimalsystem genaues Ergebnis für  $\sin 1^\circ$ . Unser Konvergenzkriterium (für  $x_{n+1} = \bar{f}(x_n)$  muß  $|\bar{f}'(x_n)| < 1$  sein) ergibt die Bedingung

$$\frac{3x^2}{p} < 1,$$

die für  $x < \sqrt[3]{\frac{p}{3}}$  erfüllt ist. Bei al-Kāṣī ist  $p = 2700$ , die Bedingung für  $x < 30$  erfüllt.

Um Tabellen für Bahnrechnungen von Himmelskörpern zur Verfügung zu stellen, mußte z.B. eine später nach Kepler benannte Gleichung

$$z = x - e \sin x$$

gelöst werden. Dem im 9. Jh. in Bagdad lebenden Gelehrten al-Ḥabāṣ al-Ḥāsib verdanken wir die erste Anwendung eines Iterationsverfahrens auf diese Gleichung [J 2; 324], [K 1]. Dabei diente der feste Winkel  $z$  zugleich als erster Näherungswert  $x_1$ . Alle weiteren  $x_i$  liefert dann der Algorithmus:

$$(+)\quad x_{n+1} = z + e \sin x_n \quad \langle =: g(x_n) \rangle,$$

der schon nach fünf Schritten eine gute Approximation ergibt. Da  $e$  als numerische Exzentrizität einer Ellipse kleiner als 1 ist, gilt für die Gleichung (+)

$$|g'(x_n)| = |e \cdot \cos x_n| < 1.$$

Damit ist die Konvergenz gesichert.

Kepler selbst hat nach dieser Iterationsvorschrift gerechnet  $\left[ K 3; 301 \right]$ . Wie man auf dieses Verfahren kam, läßt sich vielleicht so darstellen  $\left[ K 2 \right]$ :

In der Astronomie treten häufig nichtlineare Gleichungen auf, deren Abweichung vom linearen Verlauf aber gering ist. Ein Beispiel sei die Gleichung  $L = x - e(x)$ . Ein zu berechnender Wert  $x$  und eine Funktion  $e(x)$ , welche sich mit  $x$  nur wenig ändert (z.B. der Unterschied in der Bahnbewegung eines Himmelskörpers auf einer Ellipse von der auf einem Kreis) wird durch eine anderweitig gefundene Größe  $L$  festgelegt. Wenn  $e(x)$  stets sehr klein angenommen werden darf, ist es naheliegend  $e(x)$  zunächst unberücksichtigt zu lassen und erst nachher als Korrektur anzufügen, also  $x_1 = L$  zu nehmen. Zur Verbesserung wird  $x_1 - e(x_1)$  mit  $L$  verglichen.

Man bildet dazu  $L - (x_1 - e(x_1)) = e(x_1)$ , und je nach dem diese Differenz positiv oder negativ ausfällt, war der Versuchswert  $x_1$  zu klein oder zu groß. Addiert man die Differenz  $e(x_1)$  zu  $x_1$ , so stellt  $x_2 = x_1 + e(x_1)$  möglicherweise einen besseren Näherungswert dar. Genauso verfährt man mit

$$L - (x_2 - e(x_2)) = e(x_2) - e(x_1).$$

War  $x_2$  zu klein, fällt die Differenz positiv aus und umgekehrt; also ergibt die Addition:

$$x_3 = x_2 + e(x_2) - e(x_1) = x_1 + e(x_2) \text{ bzw.}$$

$$x_{n+1} = x_1 + e(x_n).$$

Bei Bürgi kommt ebenfalls ein solches Iterationsverfahren vor  $\left[ B 5; 72 f \right]$ .

Das von ihm angeführte Beispiel lautet:

$1 = 4x^2 - x^4$ , was als quadratische Gleichung  $1 = 4z - z^2$  behandelt wird.

Die selbstverständlich nur in Worten erklärte Rekursionsformel heißt

$$z_{n+1} = \frac{1 + z_n^2}{4} \quad \left( =: g(z_n) \right)$$

Zur Weiterführung des Iterationsprozesses bis zur gewünschten Genauigkeit wird der Leser mit den Worten aufgefordert: "Also möchtestu immerzu fort operirn

vnd den  $z$  verpessen, biß er lang gnueg gegen der rechten erlengert würde".

Bürgi bemerkt auch, daß beim Iterieren nicht immer alle Stellen herangezogen werden müssen, sondern man sich mit jeweils einer zusätzlichen Stelle begnügen kann. Bleibt noch zu erwähnen, daß Bürgi nur die kleinere der beiden Wurzeln,

nämlich  $w_1 = 0,267\dots$  berechnete und deshalb wahrscheinlich das Mißlingen im Falle der größeren Wurzel  $w_2 = 3,73\dots$  übersehen hat. (Die Bedingung  $|g'(z_n)| < 1$

ist für  $w_2$  nicht erfüllt.) Es ist nicht auszuschließen, daß hier Kenntnisse und

Erfahrungen Keplers eingeflossen sind.

Fourier schließlich behandelt in seiner *Théorie de la Chaleur* die Gleichung  
 $\mathcal{E} = \arctan \frac{\mathcal{E}}{\lambda}$  für  $\mathcal{E}$  als eine Rekursionsformel (Werke I; 308 ff).

## VI. Verfahren der Nullpunktverschiebung

### 1. Das Verfahren von François Viète

Das Näherungsverfahren, das wohl den entscheidensten Einfluß auf den noch heute beschrittenen Rechenweg der Wurzelverbesserung hatte, ist das von François Viète (1540 – 1603). Ghetaldi hat die Arbeit Viètes, *De numerosa potestatum purarum atque adfectarum ad exegesis resolutione tractatus*, mit dessen Einverständnis 1600 in Paris herausgegeben. Darin ist der erste Teil dem Wurzelziehen, also dem Lösen reiner Gleichungen, der zweite Teil den Lösungen der "Potenzen mit Zusätzen", also den Polynomgleichungen gewidmet. Bei Viète treten folgende, auch den Chinesen schon bekannte Gedanken wieder auf:

- Die Wurzel ist stellenweise zu bilden und von vorneherein in ihre Einer-, Zehner- und Hunderterstellen zerlegt zu denken. Eine dreistellige Zahl wird zerlegt in  $100u + 10v + w$  [V 1; 163].
- Polynomgleichungen können im Prinzip genauso approximativ gelöst werden wie das Radizieren vor sich geht, also durch Quotientenbildung [V 1; 173].

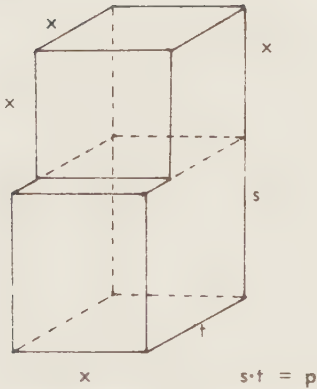
Bevor die Viètesche Methode beschrieben wird, sei an das Radizieren, wie es zur Zeit von Viète üblich war, erinnert (siehe S. 7). Da Viète in geometrischen Ausdrücken spricht, erscheint es sinnvoll, seine Darstellung durch Figuren erläuternd zu ergänzen. Zu lösen ist folgendes Problem [V 1; 176-178]:  
 "E dato in numeris cubo adfecto, adjunctione solidi sub latere et dato coefficiente plano latus analytice elicere", also aus einem in Zahlen gegebenen Kubus, an welchem an der Seite ein räumliches Stück mit gegebenem Flächenkoeffizienten angesetzt ist, die Seite analytisch zu ermitteln. (Analytisch heißt hier ungefähr mit den Mitteln der Algebra).

Wir werden also die untenstehende Figur annehmen dürfen. Die zu lösende Gleichung lautet dann:

$$(1) \quad x^3 + p x = m \quad \text{=: } f(x)$$

Bei Viète steht dafür ein numerisches Beispiel (C = Kubus, N = Numerus):

$$1 C + 30 N \text{ aequari } 14356197$$



Die Ziffern des Ergebnisses, von dem man weiß, daß es dreistellig sein wird, berechnet er der Reihe nach. Er nimmt dabei  $x = 100u + 10v + w$  an, oder, für den ersten Schritt vereinfacht,  $x = 100u + r$ . Damit die Rechnung überschaubar wird, gliedert sie Viëte in einem nach Zehnerpotenzen geordnetem Schema. Außerdem markiert er die Stellen für die Zahlen der Seiten (lateris) und Kuben durch Punkte.

Er beginnt mit: "I. Eductio lateris singularis primi". Gemeint ist, daß die erste Stelle der Lösung  $x$  gesucht wird, also  $u$ .

|                      |          |                        |                        |
|----------------------|----------|------------------------|------------------------|
| coefficientis planum | 30       | sublaterale            | modern                 |
|                      |          | ... Tot puncta laterum | 100 p                  |
| cubus adfectus       | 14 3 5 6 | 1 9 7                  | simplicium quot        |
| resolvendus          | QN. QN.  | QN                     | cubica sedesve cuborum |
|                      | Ci Ciij  | Ciij                   | Puncta cubica          |

modern  
100 p

m

Die Punkte deuten an, wie sich die Stellen der "Seite" auf diejenigen des erweiterten Cubus auswirken, d.h. die Hunderter auf die Millionen usw..

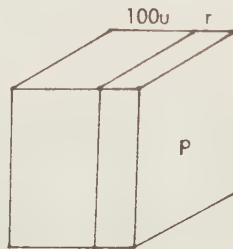
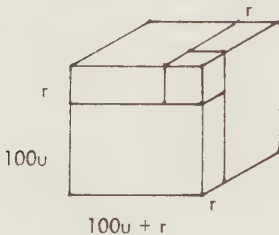
Man sucht nun die größte Ziffer  $u$ , deren Kubus kleiner als 14 ist, also  $u = 2$ .

Vom Körper der Größe  $m$  kann jetzt der Kubus  $(100u)^3$  und der Quader  $100u \cdot p$  abgezogen werden. Zur Veranschaulichung denken wir uns den Körper auseinandergezogen und ziehen von dem Würfel  $x^3$  den Würfel  $(100u)^3$  ab und von dem Quader  $p \cdot x$  den Quader  $100u \cdot p$ . Von dem Würfel bleibt übrig: - der kleine Würfel  $r^3$

- drei Platten der Größe

$100u \cdot (100u + r) \cdot r$ .

Vom Quader bleibt ein solcher der Größe  $p \cdot r$  übrig. Der Restkörper ist also:



$$(2) R_1 = (3(100u)^2 + p)r + 3(100u)r^2 + r^3.$$

Bei Viète sieht dieser Teil der Rechnung so aus :

|                                                                                    |   |     |     |                                           |
|------------------------------------------------------------------------------------|---|-----|-----|-------------------------------------------|
| Solida imprimis<br>auferenda (körper-<br>liche Größe, welche<br>erst abziehen ist) | 8 | 6   | 0   | cubus lateris primi                       |
| Summa solidorum<br>ablatitiorum (Sum-<br>me der abzuziehen-<br>den Körperstücke)   | 8 | 006 | 0   | A latere primo in<br>coefficientis planum |
| Reliquum resolvendi                                                                | 6 | 356 | 19/ |                                           |

$$(100u)^3; u = 2$$

$$100u \cdot p$$

$$(100u)^3 + 100u \cdot p = f(100u)$$

$$m = f(100u) = R_1$$

Nun folgt die Bestimmung der zweiten Stelle :

II. Eductio lateris singularis secundi . Dazu setzen wir  $r = 10v + w$  in (2) ein; wir erhalten:

$$R_1 = (3(100u)^2 + p) 10v + 3 \cdot 100u (10v)^2 + r^3 + \text{Glieder mit } w .$$

Die Glieder mit  $w$ , sowie  $r^3$  werden zunächst vernachlässigt. Ferner ersetzt Viète  $10v^2$  durch  $10^2$ ; die Motivation dafür ist nicht ersichtlich. Damit erhält

$$\text{man } v = R_1 : 10(p + 3(100u)^2 + 3 \cdot 100u \cdot 10) .$$

Diese Rechnung führt Viète so durch :

|                                                                |                                                                     |  |  |   |   |
|----------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------|--|--|---|---|
| Divisorum pars superior<br>Reliquum resolvendi cubi<br>adfecti | {coefficiens<br>planum                                              |  |  | 3 | 0 |
| Divisorum pars inferior                                        | {Triplum<br>quadratum<br>lateris primi<br>Triplum la-<br>tus primum |  |  | 3 | 5 |
| Summa divisorum                                                |                                                                     |  |  | 1 | 9 |
|                                                                |                                                                     |  |  | 7 |   |
|                                                                |                                                                     |  |  | 6 |   |
|                                                                |                                                                     |  |  | 2 | 6 |
|                                                                |                                                                     |  |  | 0 | 3 |
|                                                                |                                                                     |  |  | 0 |   |

$$rp = 10p$$

$$m - f(100u) = R_1 = \text{Dividend}$$

$$3(100u)^2 r = 3(100u)^2 \cdot 10$$

$$3 \cdot 100u \cdot r^2 = 3 \cdot 100u \cdot 100$$

$$3(100u)^2 + 3 \cdot 100u \cdot 100 + 10p =$$

$$(3(100u)^2 + p)r + 3 \cdot 100u r^2 =$$

$$f'(100u)r + 1/2 f''(100u) r^2 =$$

$$R_1 - r^3 \text{ für } r = 10$$

Die Division braucht nicht genau ausgeführt zu werden, da die erste Stelle des Results genügt. Es ergibt sich  $v = 4$ , so daß die zweite Näherung  $100u + 10v = 240$  lautet. Nach dem gleichen Prinzip läßt sich  $w$  gewinnen. "Iam duo elicita latera funguntur vice unius" : die beiden ermittelten Seiten sind jetzt als eine anzusehen, das heißt, es ist  $100u + 10v = V$ . Zunächst muß aber der neue Restkörper  $R_2 = m - f(100u + 10v) = m - f(V)$  gebildet werden.

$$\begin{aligned}
 R_2 &= m - (100u + 10v)^3 - (100u + 10v) p \\
 &= m - (100u)^3 - 100p - 3(100u)^2 10v - 3 \cdot 100u \cdot (10v)^2 - (10v)^3 - 10v \cdot p \\
 &= R_1 - (3(100u)^2 10v + 3 \cdot 100u(10v)^2 + (10v)^3 + 10v \cdot p) .
 \end{aligned}$$

|                                                         |                                                                                                                                                                         |                                                                                                                                                                                  |                                                                                     |
|---------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| Solida ablatitia<br><abzuziehende<br>körperliche Größe> | $  \begin{array}{r}  \uparrow \quad \uparrow \\  \begin{array}{cccc}  4 & 8 & & \\  & 9 & 6 & \\  & & 6 & 4 \\  & & & 1 & 2 & 0 \\  \hline  \end{array}  \end{array}  $ | à latere secundo in qua-<br>dratum lateris primi<br>à quadrato lateris secundi<br>in triplum lateris primi<br>Cubus lateris secundi<br>à latere secundo in<br>coefficiens planum | $3(100u)^2 \cdot 10v$<br>$3 \cdot 100u \cdot (10v)^2$<br>$(10v)^3$<br>$10v \cdot p$ |
| Summa solidorum<br>auferenda                            | $  \begin{array}{cccc}  5 & 8 & 2 & 5 & & 2 & 0 \\  \hline  \end{array}  $                                                                                              |                                                                                                                                                                                  | Summe für $r = 10v = 40$                                                            |
| Reliquum resol-<br>vendi cubi adfecti                   | $  \begin{array}{cccc}  \downarrow \quad \downarrow \\  \begin{array}{cccc}  5 & 2 & 4 & 9 & 9 & 7 \\  \hline  \end{array}  \end{array}  $                              |                                                                                                                                                                                  | $R_2 = m - f(V)$                                                                    |

Der erste Schritt wird also jetzt wiederholt . " Eductio lateris singularis tertii ."

$$\begin{aligned}
 \text{Aus } m = f(V + w) &= (V + w)^3 + p(V + w) \\
 &= V^3 + pV + 3V^2w + 3Vw^2 + w^3 + pw
 \end{aligned}$$

und  $R_2 = m - V^3 - pV$  ergibt sich

$$R_2 = 3V^2w + 3Vw^2 + w^3 + pw = (3V^2 + p + 3Vw)w + w^3 .$$

Wird  $w^3$  vernachlässigt und in der Klammer  $w$  durch den Stellenwert, also 1 ersetzt, so erhält man

$$(+)\ w = R_2 : (3V^2 + 3V + p) .$$

Das rechnet Viète in dem folgenden Teil des Schemas aus:

|                                     |                         |                                                                                                                                          |                                                          |
|-------------------------------------|-------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|
| Divisorum<br>pars superior          | coefficiens<br>planum   | $  \begin{array}{r}  \uparrow \quad \uparrow \\  \begin{array}{ccc}  & & 3 & 0 \\  & & & \cdot \\  \hline  \end{array}  \end{array}  $   | $1p$                                                     |
| Reliquum resolvendi cubi<br>adfecti |                         | $  \begin{array}{ccc}  5 & 2 & 4 & 9 & 9 & 7 \\  \hline  \end{array}  $                                                                  | $m - f(V) = R_2 = \text{Dividend}$                       |
|                                     | Triplum<br>quadratum    | $  \begin{array}{ccc}  1 & 7 & 2 & 8 \\  \hline  \end{array}  $                                                                          | $3V^2$                                                   |
| Divisorum<br>pars inferior          | Triplum<br>latus primum | $  \begin{array}{ccc}  & & 7 & 2 \\  \hline  \end{array}  $                                                                              | $3V$                                                     |
| Summa divisorum                     |                         | $  \begin{array}{ccc}  \downarrow \quad \downarrow \\  \begin{array}{ccc}  1 & / & 3 & 5 & 5 & 0 \\  \hline  \end{array}  \end{array}  $ | $3V^2 + 3V + p = f'(V) + \frac{1}{2}f''(V)$<br>= Divisor |

( Die Summe der beiden Ableitungen ist der von Viète gesetzte Faktor zu  $w$  ;  
hierin liegt der entscheidende Unterschied zum Newton-Verfahren (siehe S.26)).

Der Quotient (+) gibt einen Näherungswert für  $w$  , welcher zu  $w = 3$  abge-  
schätzt wird. Die folgende Einsetzung bestätigt dessen Richtigkeit.

Solida ablatitia

Summa solidorum  
auferenda, aequalis  
residuo resolvendo  
cubo adfecto

|  |       |       |
|--|-------|-------|
|  | 1 7 3 | 5 5 0 |
|  | 5 1 8 | 4     |
|  | 6 4 8 |       |
|  | 2 7   |       |
|  | 9 0   |       |
|  | 5 2 4 | 9 9 7 |

à latere secundo in  
quadratum triplum  
lateris primi  
à quadrato lateris secundi in  
triplum lateris primi  
Cubus lateris secundi  
à latere secundo in  
coefficientens planu

Als ganzzahlige Wurzel kommt 243 heraus.

Entscheidend bei dem Verfahren ist, daß man sich eine lineare Näherungsgleichung verschafft, aus der durch Division ein Näherungswert für die gewünschte Stelle hervorgeht. Dabei ist zu betonen, daß die Division nicht exakt durchgeführt und die Abschätzung sehr grob vorgenommen wird. Z.B. ergibt die Division zur Bestimmung von  $v$  den Wert 5,03... , welcher zu  $v = 4$  beinahe ratend abgerundet wird. Hieraus wird deutlich, welchen Versuchscharakter das Viètesche Lösungsverfahren noch besitzt.

Allgemein läßt sich der Divisor für die Lösung von  $f(x) = \sum_{i=1}^n a_i x^i = m$  so darstellen: Für einen Näherungswert  $x_1$  und der nächsten gesuchten Ziffer  $r$  entwickelt man  $f(x_1 + r) = m$  in eine Potenzreihe (vgl. [E 2; 234]). Ordnet man gleich um, so hat man

$$m - f(x_1) = (f'(x_1) + \frac{1}{2}f''(x_1)r + \dots + \frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x_1)r^{n-2})r + a_n r^n.$$

Soll  $r$ , dessen Stellenwert bekannt ist, bestimmt werden, so wird, was unter Umständen einen nicht unerheblichen Fehler bedeutet,  $r^n$  weggelassen. Divisor ist der Klammerausdruck, in dem für  $r$  die entsprechende Zehnerpotenz eingesetzt wird.

Viète löst nur Probleme, die auf ganzzahlige Wurzeln führen; bei der Aufgabe 29 des gleichen Kapitels tritt ein negativer Leitkoeffizient auf und damit zwei ganzzahlige Wurzeln, welche er beide berechnet. Im letzten Teil seiner Arbeit über das Lösen numerischer Gleichungen, weist Viète auf die Möglichkeit hin, das Verfahren auch auf irrationale Wurzeln auszudehnen [V 1; 228].

Viète hat seine Formelsprache nicht auf numerische Gleichungen übertragen. Sie gehörte für ihn offensichtlich nur zur Gleichungslehre [V 2]. Damit fehlt aber eine Rekursionsformel, die zusammen mit den Ergebnissen aus seiner Gleichungslehre eine Vertiefung der Theorie über Näherungsmethoden hätte einleiten können.

Es ist nicht ganz auszuschließen, daß Viète, was die Idee betrifft, in Jost Bürgi einen Vorgänger für die besprochene Methode hat. Die Arbeit Bürgis, gelegentlich als Bürgis Coss bezeichnet, wird verschieden datiert. Hofmann schreibt 1592 [H 7; 168], und Wolf stellt sie zwischen 1592 und 1602 [W 8; 8 f]. Neuere Untersuchungen lassen auf eine Fertigstellung nach 1600 schließen [B 5]. Das Kapitel über das genannte Näherungsverfahren wurde von Bürgi selbst geschrieben, während der übrige Teil der Coss von Kepler nach Angaben Bürgis aufgesetzt wurde, und zwar eindeutig nach 1600. Da nicht bekannt ist, von wann Bürgis Manuskript stammt, und Bürgi kein Latein lesen konnte, läßt sich nicht belegen ob Bürgi die Arbeit von Viète gekannt hatte. Bei der Berechnung von  $3x - x^3 = 1$  ( $f(x) = m$ ) geht er so vor [W8;20], [B 5; 58-62]: Er weiß bereits, daß eine Lösung zwischen 1 und 2 liegt und setzt deshalb  $x_1 = 1$ . Dies in die Gleichung links eingesetzt ergibt

$$3x_1 - x_1^3 = 2.$$

Die Differenz zur Gleichungskonstanten 1 nennt er "Excess", wir würden sagen  $f(x_1) - m$ . Nun berechnet er, ohne es näher zu begründen

$$2x_1^2 + 2x_1 - (3 - x_1^2)$$

und dividiert damit den "Excess". Wenn wir statt  $x$  den Näherungswert  $x_1 + r$  in  $f(x)$  einsetzen und nach Potenzen von  $r$  ordnen, erhalten wir

$$f(x_1) - m = -(f'(x_1) + \frac{1}{2}f''(x_1)r)r - r^3$$

und daraus nach Viète 
$$r \approx \frac{f(x_1) - m}{-(f'(x_1) + \frac{1}{2}f''(x_1)10^{-1})} =$$

$$\frac{f(x_1) - m}{3x_1^2 + 3x_1 \cdot 10^{-1} - 3} =$$

$$\frac{f(x_1) - m}{2x_1^2 + 10^{-1}3x_1 - (3 - x_1^2)} \approx \frac{1}{2}.$$

Man erkennt nun, daß Bürgi im Nenner beim zweiten Summanden den Koeffizienten 2 statt 3 stehen hat. Und außerdem, das zeigt die weitere Rechnung, wird für die Korrektur  $r$  nicht der zu erwartende Stellenwert, sondern der zuletzt gefundenen eingesetzt. Nach Viète mußte  $10^{-1}$ , bei Bürgi erst  $10^0$  stehen.

Mit  $x_1 + r =: x_2 = 1,5$  wird der nächste Schritt so durchgeführt:

modern

nach dem Original

|                   |             |                                      |
|-------------------|-------------|--------------------------------------|
| $x_2$             | <u>1</u>    | — $x^3$ multipliziert in die x       |
|                   | <u>15</u>   | — die x in 15 gibt $x^2$             |
|                   | <u>15</u>   | — $1 \cdot x$                        |
|                   | 75          |                                      |
| $x_2^2 = 2,25$    | <u>15</u>   |                                      |
|                   | 225         | sind x subtraier von 300 x bleibt 75 |
|                   | <u>300</u>  |                                      |
| $3 - x_2^2$       | 75          | complement                           |
|                   | <u>15</u>   |                                      |
|                   | 375         |                                      |
|                   | <u>175</u>  |                                      |
| $(3 - x_2^2) x_2$ | 1125        |                                      |
|                   | <u>1000</u> | sub                                  |
| $f(x_2) - m$      | 125         |                                      |

Für den Nenner entsteht die folgende Zahlenkolonne :

|                       |           |
|-----------------------|-----------|
| $2 x_2^2 = 4,5$       | 450       |
| $2 x_2 10^{-1} = 0,3$ | <u>30</u> |
| Summe                 | 480       |
| $(3 - x_2^2)$         | <u>75</u> |
| Divisor               | 405       |

Die neue Korrektur  $s$  gibt der Quotient  $\frac{1250}{405} = 3 \text{ Rest } 35$ , so daß  $x_2 + s = 1,53$ .  
Und so fährt er fort. Wie er auf diesen Rechenweg gekommen ist sagt er aber nicht.

Rashed glaubt in  $\overset{v}{\text{Saraf}} - \text{al} - \text{Din} - \text{al} - \text{Tūsī} \left[ \text{R } 2 \right]$  einen Vorgänger von Viète gefunden zu haben, jedoch zeigt sich, daß Tūsī's Verfahren nicht das von Viète, sondern im Grunde das von Newton-Raphson ist (siehe S. 30). Lediglich die Schreibweise ist verblüffend ähnlich, aber die jeweils auftretenden Divisoren sind verschieden. Tūsī lebte um 1200.

Sehr viel ähnlicher, was das Näherungsprinzip betrifft, ist ein chinesisches Vorgehen zur Lösung höherer Gleichungen. Liu Hui (3. Jh.) hat in seinem Kommentar zu den "Neun Büchern" hervorgehoben, daß das Verfahren

mit dem Horner - Schema nach den Dezimalstellen beliebig weit fortgesetzt werden kann [L 8; III, 127]. Ch' in Chiu-shao hat im 13. Jh. ein solches Verfahren durchgeführt [L 11; 199, Probl. III, 8]. Für eine Gleichung vierten Grades und einen bereits gefundenen Näherungswert  $x_1$ , wird bei der Einsetzung ( $x_1 + h$ ) für die Unbekannte mit Hilfe des Horner - Schemas die Gleichung nach  $h$  entwickelt. Es ergibt sich in unserer Schreibweise

$$g(h) = \sum_{i=0}^4 \frac{1}{i!} f^{(i)}(x_1) h^i =: \sum_{i=0}^4 b_i x^i.$$

$$\text{Der korrigierende Summand } h = \frac{-b_0}{b_1 + b_2 + b_3 + b_4}.$$

(Später wird diese Methode bei den Arabern, z. B. al-Kāṣī, beim Radizieren durch die Formel

$$\sqrt[n]{a^n + r} = a + \frac{r}{(a+1)^n - a^n}$$

wieder angewandt. Im Beispiel  $f(x) = x^4 - N = 0$  ist  $x = \sqrt[4]{N} = \sqrt[4]{a^4 + r}$ .

$$\text{D.h. aber } x_1 = a \text{ und } x_2 = a + h = a + \frac{-f(x_1)}{f'(x_1) + \frac{1}{2}f''(x_1) + \frac{1}{6}f'''(x_1) + 1}$$

$$= a + \frac{N - a^4}{4a^3 + 6a^2 + 4a + 1}$$

$$= a + \frac{r}{(a+1)^4 - a^4}.)$$

Bei Viète hätte das  $h$  etwas anders ausgesehen, denn bei ihm sind die  $b_i$  durch die Potenzen der Stellenwerte  $s_i$  gewichtet und  $b_4 = 0$  gesetzt:

$$h = \frac{-b_0}{s_0^0 b_1 + s_1^1 b_2 + s_2^2 b_3}.$$

Sowohl bei Viète, als auch bei Ch' in Chiu-shao ist das  $h$  jeweils nur eine Verbesserung um eine Stelle, so daß der Fortschritt, welchen man Viète zuschreibt, noch nicht groß ist. Seine Verdienste sind, wenn man davon absieht, daß er seine Methode wahrscheinlich neu entdeckt hat, in der Systematisierung und in der Breitenwirkung zu sehen. Spätere Mathematiker, vor allem in England, haben das Verfahren von Viète mit geringfügigen Abänderungen als gängige Methode weit verbreitet. So Thomas Harriot (1560 - 1621) in seiner postum gedruckten Exegetice numerosa von 1631 [H 3; 117 ff], in der dem Verfahren ein ganzes

Kapitel eingeräumt wird; dann William Oughtred ( 1574 - 1660 ) , in dessen ebenfalls 1631 erschienenen Arbeit *Clavis mathematica* [O 1; 120] , [C 4; 42 ff] , ebenso Dechales 1674 [D 2; 73/-745] , bei J. Hume 1636 [H 10] , bei Hérigone [H 4] und zuletzt noch in John Wallis' Algebra von 1685, in der gleichzeitig das Verfahren von Newton abgehandelt wird.

## 2. Das Verfahren von Isaac Newton ( 1643 - 1727 )

Die 1669 entstandene Arbeit " De analysi per aequationis numero terminorum " hat Newton noch vor der Drucklegung seinem Lehrer Isaac Barrow gegeben, und dieser übersandte sie John Collins, dem damaligen Präsidenten der Royal Society. Unter Newtons Namen wurde sie erst 1711 gedruckt. Die darin beschriebene Methode war aber schon vorher Freunden und Korrespondenten von Newton und Collins bekannt. So kam es, daß sie erstmals 1685 in der englischen Ausgabe von Wallis' Algebra, Kap. 94 , publiziert wurde, und Joseph Raphson ( gest. um 1715 ) , ohne Newton erwähnen zu müssen, 1690 bereits das vereinfachte Verfahren herausgab [N 2; 219] .

" Angenommen  $\langle f(y) \Rightarrow y^3 - 2y - 5 = 0$  muß gelöst werden, und es ist 2 die Zahl, die von der gesuchten Wurzel um weniger als  $\frac{1}{10}$  differiert  $\langle$  gemeint ist wohl, um höchstens eine Stelle hinter dem Komma verschieden  $\rangle$  . Dann setze ich

$$2 + p = y$$

und substituiere diesen Wert in der Gleichung, und als Folge davon ergibt sich eine Gleichung  $\langle g(p) \Rightarrow p^3 + 6p^2 + 10p - 1 = 0 \rangle$  ,

deren Wurzel gesucht und zur ersten Näherung ( quotiente ) addiert werden muß; speziell, wenn  $p^3 + 6p^2$  wegen seiner Kleinheit vernachlässigt wird, gilt  $\langle$  näherungsweise  $\rangle$   $10p - 1 = 0$  oder  $p = 0,1$  .

Setzt man nun  $0,1 + q = p$  ,

so ergibt sich für q die Gleichung

$$\langle h(q) \Rightarrow q^3 + 6,3q^2 + 11,23q + 0,061 = 0 \rangle .$$

Und da  $11,23q + 0,061$  an die Wahrheit nahe herankommt, ist nahezu  $q = -0,0054$  " [N 2; 218-221] . Bereits nach drei Schritten ergibt sich die Lösung  $y = 2,09455147 \dots$  .

Dieses Verfahren der Linearisierung kann beliebig weit fortgesetzt werden. Geometrisch bedeutet sie, daß der Graph der Funktion durch seine Tangente ersetzt wird. Die Schnittstelle der Tangente mit der  $x$ -Achse stellt einen Näherungswert für eine Nullstelle ~~des~~ durch die Substitution zum Nullpunkt des Koordinatensystems hin verschobenen Graphen der Gleichung dar.

Es sei  $f(x) = 0$  zu lösen. Setzt man für einen Näherungswert  $x_1$  und seine Korrektur  $r$

$$(1) \quad f(x) = f(x_1+r) = f(x_1) + f'(x_1)r + \frac{1}{2}f''(x_1)r^2 + \text{höhere Terme von } r \quad ^{+})$$

und vernachlässigt die Glieder ab  $r^2$  einschließlich, so stellt

$$f(x_1) + f'(x_1)r = 0$$

die Gleichung der Tangente durch den Punkt  $(x_1; f(x_1))$  dar. Da deren Nullstelle gesucht ist, kann daraus wieder ein Näherungswert  $r_1$  für  $r$  gewonnen werden. (Diese geometrischen Überlegungen scheint J.R.Mourraille 1768 erstmals veröffentlicht zu haben [C 2], während von Newton darüber nichts bekannt ist.) Lineare Interpolation bedeutet dagegen, daß man ein Stück der Kurve um die gesuchte Wurzel herum durch eine Sehne ersetzt.

Aus (1) erhält man, da ja  $f(x_1+r) = 0$  ist, bei Weglassen der Glieder mit  $r^2$  und höher

$$r \approx r_1 = - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Nun behandelt man die Gleichung (1) als solche für  $r$ :  $g(r) := f(x_1+r)$ , mit der Näherungslösung  $r_1$ . Man entwickelt also

$$(2) \quad g(r) = g(r_1+q) = g(r_1) + g'(r_1)q + \frac{1}{2}g''(r_1)q^2 + \text{höh. Terme von } q$$

und erhält, wenn man nur die linearen Teile berücksichtigt,

$$q \approx q_1 = - \frac{g(r_1)}{g'(r_1)}.$$

Als Folge von Näherungen ergibt sich:

$$x_1; x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}; x_3 = x_2 - r_1 - \frac{g(r_1)}{g'(r_1)}; \text{ usw. .}$$

Dies ist das Newton-Verfahren. Ausdrücklich weist Newton darauf hin, daß man

<sup>+) Bei einem Polynom erhält man die Koeffizienten auch ohne Differentiation, wenn man  $f(x+r)$  nach Potenzen von  $r$  ordnet.</sup>

anstatt nach dem linearen, auch erst nach dem quadratischen Glied abbrechen kann. In Newtons Beispiel mußte dann  $p$  aus  $6p^2 + 10p - 1 = 0$  bestimmt werden.

Sowohl Newton wie Viète bestimmen die Korrekturglieder  $r_1, q_1, \dots$  aus linearen Gleichungen. Während Newton alle höheren als linearen Glieder ganz vernachlässigt, berücksichtigt sie Viète noch bis zur vorletzten Potenz, und zwar in der Form  $(10^n)^{i-1}$  für  $r_i$ , wenn  $10^n$  die Größenordnung von  $r$  ist. Ferner: Newton berechnet  $r_1, q_1, \dots$  aus den linearen Gleichungen genau, während Viète daraus nur die nächste Ziffer, also eine einstellige Zahl ermittelt und daher die Division gar nicht exakt durchzuführen braucht.

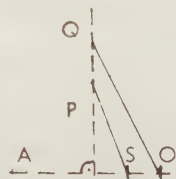
Eine Art Linearisierung kann man schon als Grundlage der babylonischen Berechnung einer Quadratwurzel annehmen, wenn

$$\sqrt{a} = \sqrt{h^2 + r} \approx h + \frac{r}{2h}$$

gerechnet wird. Diese Regel weist eine lange Tradition über die Griechen, Inder, Araber und die italienischen Mathematiker des Mittelalters (z.B. Leonardo von Pisa) auf. Auch in der Gleichungslösung der Chinesen um 250 v. Ch. (siehe Kap. Horner - Schema) ist eine solche Linearisierung erkennbar.

Newton hatte die Möglichkeit, mit der von Viète und Descartes entwickelten Symbolik die Regel allgemein für beliebige algebraische und transzendente Gleichungen anzugeben.

Newton selbst wandte sein Verfahren in einer anderen Form auf die sogenannte Kepler-Gleichung, eine transzendente, im ersten Buch der "Principia", prop 31, Scholium, an (vgl. auch [A 2]). Die zu lösende Gleichung heißt in unserer heutigen Schreibweise  $x - e \sin x = z \langle = f(x) \rangle$ , und sie erlaubt die Berechnung einer elliptischen Planetenbewegung, wobei  $z$  die bekannte mittlere Anomalie,  $e$  die numerische Exzentrizität der Ellipse und  $x$  die zu berechnende exzentrische Anomalie bedeutet. (Unter mittlerer Anomalie versteht man den Winkel, um den sich ein Himmelskörper über die Lage bei Sonnennächststand (Perihel) erhoben hat ( $\angle PSA$  in der Figur), gemessen vom Brennpunkt  $S$  der Ellipse aus. Exzentrische Anomalie bedeutet der Winkel zwischen Perihel und dem  $P$  entsprechenden Punkt  $Q$  auf dem Scheitelkreis, gemessen vom Kreismittelpunkt  $O$  aus. Die Gleichung gewinnt man aus "Keplers Aufgabe" in Verbindung mit dem zweiten Keplerschen Gesetz.



Angenommen  $x_1$  wäre eine Näherung von  $x$ , die die Entweder durch Konstruktion oder durch Überschlag gefunden wird, so ist  $x_1 - e \sin x_1 = z_1$ , und die an  $x_1$  anzubringende Korrektur näherungsweise

$$r = \frac{z - z_1}{1 - e \cos x_1} = \frac{f(x) - f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Mit  $x_2 = x_1 + r$  hat man einen neuen Näherungswert, und dieser kann iterativ nach der gezeigten Vorschrift verbessert werden. Dies ist nicht die erste Berechnung der Kepler-Gleichung, denn bereits die Araber der Mittelalters konnten dies (siehe S. 15).

Wie Newton auf seine Art der Näherung kommt, läßt sich nicht ohne genaue Kenntnis der astronomischen Zusammenhänge mit Bestimmtheit sagen. Newton selbst beschreibt lediglich die einzelnen Rechenschritte, welche zur Näherung nötig sind.

Bei bekanntem  $z$  und bekannter numerischer Exzentrizität  $e$  wird schrittweise und ohne Begründungen der Quotient entwickelt, welcher die Korrektur  $r$  zu  $x_{n-1}$  darstellen soll:

$$r = \frac{z - (x_n - e \sin x_n)}{1 - e \cos x_n} = \frac{z - f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Dies ist Newtons Näherung für Gleichungen der Form  $f(x) = a \neq 0$ . Dabei ist zusätzlich sogar das später als Raphsons Vereinfachung bekannt gewordene Näherungsverfahren angewandt (siehe S. 29).

Newton könnte so überlegt haben: Wenn  $x_1 + r$  ein besserer Wert sein soll, muß annähernd  $z = x_1 + r - e \sin(x_1 + r)$  gelten. Das führt aber zu

$$z = x_1 + r - e (\sin x_1 \cos r + \cos x_1 \sin r).$$

Um vernachlässigbare Größen zu erhalten, wird  $\cos r$  und  $\sin r$  je in eine Potenzreihe entwickelt. Es ergibt sich:

$$z = x_1 + r - e \sin x_1 + \frac{r^2 e \sin x_1}{2!} - \dots - r e \cos x_1 + \frac{r^3 e \cos x_1}{3!} - \dots$$

$$z - (x_1 - e \sin x_1) = r - e \left( \frac{-r^2 \sin x_1}{2!} + \dots + r \cos x_1 - \frac{r^3 \cos x_1}{3!} + \dots \right),$$

und näherungsweise

$$z - (x_1 - e \sin x_1) = r (1 - e \cos x_1) \Rightarrow r = \frac{z - (x_1 - e \sin x_1)}{1 - e \cos x_1}.$$

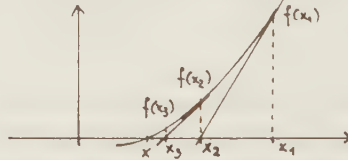
In einer anderen Ausgabe der "Principia" [N 6; Bd.VI, 315 f] wird die Methode etwas abgewandelt, beruht aber im wesentlichen auf demselben Grundsatz.

Die erste systematische Arbeit über den Näherungsprozess Newtons stammt von Joseph Raphson in seiner "Analysis Aequationum Universalis" von 1690 [R 1], [L 3; Note V, 161]. Mußte nach Newton stets eine neue Gleichung gelöst werden, weil nur die additive Korrektur substituiert wurde, so hat Raphson den tatsächlichen Näherungswert  $x_1 + r_1 = x_2$  jeweils in die ursprüngliche Gleichung  $f(x) = 0$  eingesetzt. Der Vorteil des Gedankens von Raphson ist der, daß ein Iterationsprozess erhalten wird, der in moderner Schreibweise so aussieht:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}, \quad i = 1, 2, 3, \dots,$$

und auch heute so verwendet wird.

Geometrisch heißt dies: Man sucht den zur Nullstelle  $x_i$  der Tangente gehörigen Funktionswert  $f(x_i)$  und bildet an der gleichen Kurve bei  $(x_i; f(x_i))$  wieder die Tangente usw. .



Es ist zu vermerken, daß Raphson seine Formel nicht funktional ausdrückt, sondern auf rein algebraische Weise mit Polynomen [C 1; 194].

Mit den Bezeichnungen von S. 26 gilt:  $x_1 + r = x_1 + r_1 + q = x_2 + q$ .

Nach Raphsons Methode erhält man  $f(x_2 + q) = f(x_2) + f'(x_2)q + \dots$  und

daraus 
$$q \approx q_1 = - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}.$$

Nun ist aber  $g(r_1) = f(x_1 + r_1) = f(x_2)$  und  $g'(r_1) = \frac{dg}{dr}(r_1) = f'(x_1 + r_1) = f'(x_2)$ ,

also auch  $\bar{q}_1 = - \frac{g(r_1)}{g'(r_1)} = q_1$ ;  $q_1$  ist aber die Korrektur nach Newton.

Demnach liefern die beiden Varianten das gleiche Ergebnis.

1694 löste Edmund Halley (1656 – 1742) algebraische Gleichungen, indem er, wie von Newton vorgeschlagen, aber damals noch nicht publiziert, die Kurve von  $f(x)$  in einer Umgebung der Wurzel durch ein Parabelstück ersetzt [H 2; 142–148].

Wenn  $f(x)$  durch  $x_1 + r$  transformiert wird, erhält man bekanntlich

$$f(x_1+r) = 0 = f(x_1) + f'(x_1)r + \frac{1}{2}f''(x_1)r^2 + \dots$$

( Auch Halley benützt noch keine Differentiale ). Dies liefert eine quadratische Gleichung für  $r$ . Von den zwei Lösungen rechnet er mit derjenigen weiter, welche durch eine lineare Näherungsgleichung erkennbar wird. Für die auftretende Quadratwurzel benützt er eine Formel von de Lagny [L 2]:

$$\sqrt{a^2 + b} = a + \frac{a b}{2 a^2 + \frac{1}{2} b}, \text{ die durch zweimalige Anwendung der Formel}$$

$\sqrt{a^2 + b} = a + \frac{b}{2a}$  entsteht. Diesen Näherungswert kannte schon Cataldi (siehe S. 44). Halleys Modifikation ist zwar wesentlich aufwendiger als die von Newton oder Raphson, aber dafür mit doppelter Konvergenzgeschwindigkeit, d.h. bei jedem Näherungsschritt gewinnt man doppelt so viele Stellen, wie beim Linearisieren. Dies hat auch Newton schon festgestellt [N 2; 22]. Sucht man den Wert  $p$ , wie er bei Newton vorkommt, so hat Halley

$$6 p^2 + 10 p - 1 = 0 \implies p \approx 0,0946,$$

ein Wert, den Newton erst nach dem zweiten Schritt bekommt. Eine geometrische Deutung gibt Halley nicht.

Bislang wurden die Koeffizienten einer transformierten Gleichung durch Einsetzung, d.h. mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes gefunden und so auch die Transformationen des Newton - Verfahrens. Brook Taylor ( 1685 - 1731 ) hat in einer 1717 in den Philosophical Transactions herausgegebenen Abhandlung [T 1] ein Polynom  $f(a+p)$  nach  $p$  mit den bekannten Ableitungen von  $f$  als Koeffizienten entwickelt. Zur approximativen Lösung einer Polynomgleichung bricht er nach dem quadratischen Glied ab und hat damit erstmals die Halley'sche Modifikation des Newton - Verfahrens mit Hilfe der Differentialrechnung angewandt. Taylor erkannte auch, daß seine Methode der Reihenentwicklung gleichfalls transzendente Gleichungen lösen hilft. Bei Euler ist dies 1755 schon fester Bestandteil seiner Methoden [E 7; § 242 f].

Ein besonderes Problem stellten natürlich immer noch die komplexen Wurzeln dar. In den "Meditationes algebraicae" ( 1770 ) beschreibt Edward Waring ( 1734 - 1793 ) eine Rechenvorschrift, die es gestattet, auch komplexe

Wurzeln zu approximieren. Wesentlicher Bestandteil ist das Newton-Raphson-Verfahren [W 2; 268-272]. Der Gedankengang ist in moderner Schreibweise folgender:

Sei  $a + ib$  eine Näherung für eine komplexe Nullstelle von  $f(x) = 0$ , so substituiert man  $a + r + i(b + s)$  und erhält

$$f(a+r+i(b+s)) = g(r,s) + i h(r,s) .$$

Es gilt aber  $f(x) = 0 \iff g(r,s) = h(r,s) = 0$ .

Wir würden heute  $g$  und  $h$  so erhalten:

$$f(a + r + i(b + s)) = f(a,b) + r f_a(a,b) + s f_b(a,b) + \frac{1}{2} r^2 f_{aa}(a,b) + r s f_{ab}(a,b) + \frac{1}{2} s^2 f_{bb}(a,b) + \dots$$

Nun ordnet man nach komplexen und nichtkomplexen Summanden und erhält ein  $g(r,s)$  aller Realteile und ein  $h(r,s)$  aller Imaginärteile. Im Prinzip führt Waring das gleiche durch, entwickelt aber nicht die ganze Funktion, sondern nur bis  $f(a,b) + f_a(a,b)r + s f_b(a,b)$  und ordnet dann um. Damit fallen alle Potenzen von  $r$  und  $s$  und alle Produkte von  $r$  und  $s$  untereinander weg. Da Real- und Imaginärteil jeweils 0 sein müssen, erhält man ein eindeutig lösbares, lineares Gleichungssystem, das Näherungswerte für  $r$  und  $s$  liefert.

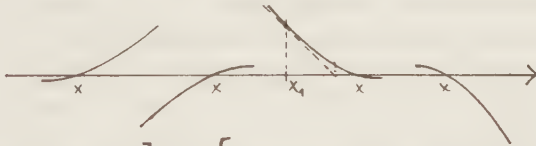
Mit zunehmendem Fortschritt in Wissenschaft und Technik, war es immer häufiger notwendig, Kriterien für die Konvergenz des Newton-Verfahrens zu kennen. Selbstverständlich war die Methode wegen ihrer Einfachheit und großen Wirksamkeit ein Objekt, das von nahezu allen späteren Mathematikern immer wieder behandelt wurde, zum Teil abgewandelt und auf verschiedene Weisen hergeleitet wurde. Ein Konvergenzkriterium fehlte aber noch.

Zur Zeit als Joseph Raymond Mourraille (17?? - 1782) hinreichende Bedingungen für die Konvergenz des Verfahrens gab (1768) [M 5] (nach [C 2]), kannte man bereits die Wege, auf denen sich die Anzahl und Grenzen von komplexen und mehrfachen Wurzeln eines Polynoms feststellen ließen. Hier kann man z.B. die Zeichenregel oder das Theorem von Rolle (siehe Kap. VIII) nennen. Was fehlte war eine Angabe darüber, wie der erste Näherungswert  $x_1$  gewählt werden muß, um zu verhindern, daß nach anfänglicher Konvergenz auf einmal Divergenz eintritt. 1798 hält es Lagrange noch für schwer, wenn nicht gar unmöglich [L 3; Note V, 163] von vorneherein Bedingungen anzugeben. Hieraus kann man entnehmen, daß die Arbeit Mourrilles, obwohl recht umfangreich, kaum bekannt geworden ist.

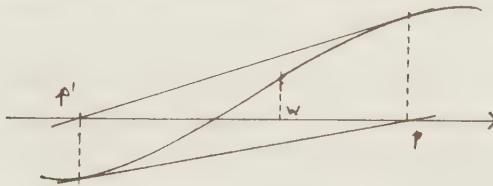
Mourraille brachte in die Beweisführung erstmals geometrische Überlegungen mit herein: Danach hängt die Konvergenz des Verfahrens von dem Vorzeichen der Krümmung der Kurve ab. Die Maßzahl der Subtangente ist zugleich die für die Korrektur  $r$  des Näherungswertes  $x_1$  (siehe S. 29).

Folgende Fälle hat Mourraille unterschieden :

a. Das Verfahren konvergiert gegen die Wurzel  $x$ , wenn als erster Wert  $x_1$  so gewählt wird, daß das Kurvenstück zwischen  $x_1$  und  $x$  konvex gegen die Abszisse ist. (Konvex gegen die  $x$ -Achse heißt Linkskrümmung falls  $f(x) > 0$  und Rechtskrümmung falls  $f(x) < 0$ , also  $f(x) f''(x) > 0$ .) Wenn man sich von rechts der Wurzel nähert, bedeutet dies bei  $f(x) > 0$ , daß die Tangente zunehmend flacher verläuft, und damit die Schnittpunkte der Tangenten mit der  $x$ -Achse zur Wurzel hinwandern (siehe Figur). Ganz analog ist die Überlegung für die drei anderen Fälle von Konvexität gegen die  $x$ -Achse.

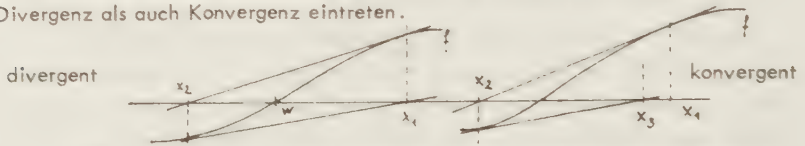


b. Wenn im offenen Intervall  $]x; x_1[$  ein Wendepunkt mit Abszisse  $w$  liegt, so kann es einen Punkt  $p$  in  $]w; x_1[$  geben, der das Verfahren oszillieren läßt. Dieser Punkt ist die Grenze zwischen Konvergenz gegen  $x$  ( $x_1 \in [x; p[$ ) und Divergenz (sonst). Da ein Wendepunkt im Intervall liegt, heißt das, daß  $f''$  das Vorzeichen wechselt. Demzufolge kann die Tangente in  $(p; f(p))$  mit der  $x$ -Achse einen Schnittpunkt  $p'$  haben, für den die Tangente in  $(p'; f(p'))$  den Schnittpunkt  $p$  ergibt. Das heißt, die Längen der Subtangenten bleiben gleich.



c. Wenn  $x_1$  auf einem konkaven Stück der Kurve gewählt wird, konvergiert das Verfahren dann, wenn der Nullpunkt der Tangente in  $[x; p[$  fällt;  $f(x) f'(x)^{-1}$  wechselt dann das Vorzeichen.

d. Wenn die gesuchte einfache Wurzel ein Wendepunkt ist, sodaß die Kurve in einer Umgebung der Wurzel konkav gegen die x-Achse verläuft, bilde man die zweite oder, falls notwendig, die vierte usw. Ableitung, denn sie haben die gesuchte Wurzel mit der Gleichung gemeinsam. In diesem Fall kann sowohl Divergenz als auch Konvergenz eintreten.



50 Jahre später fand Jean Baptiste Joseph Fourier hinreichende Kriterien für die Konvergenz des Verfahrens, ohne die Arbeit von Mourraille zu kennen [F 2; 246 f]. Er drückte sie mit Hilfe der Differentialrechnung aus: Liegt in Intervall  $[a; b]$  nur eine reelle Wurzel von  $f(x) = 0$  und ist  $f''(x) \neq 0$  in  $[a; b]$  (d.h. kein Wendepunkt), so kann die Newton-Methode von derjenigen Grenze mit Sicherheit aus angewandt werden, für die  $f$  und  $f''$  gleiches Vorzeichen haben (Konvexitätsbedingung). Fourier verlangt außerdem, daß im Intervall  $[a; b]$   $f'(x) \neq 0$  ist. Wäre  $f(\alpha) = f'(\alpha) = 0$ , so würde eine Doppelwurzel  $\alpha$  vorliegen. Man kann zeigen, daß  $f'(\alpha) \neq 0$  nicht notwendig ist für die Konvergenz, obwohl diese dann nicht mehr quadratisch sondern nur mehr linear ist. Die Näherungsformel  $x = f(x)/f'(x)$  kann für  $x = \alpha$  stetig ergänzt werden.

### 3. Das Horner-Schema

Eine Hilfe zur Berechnung von Koeffizienten und damit zugleich von Funktionswerten transformierter Gleichungen, stellt das nicht ganz zu Recht nach William George Horner (1786 – 1837) benannte Horner-Schema dar. Es ist eigentlich kein Näherungsverfahren. Tatsächlich wurde aber dieses Schema mit Erfolg als notwendiges Hilfsmittel zur Wurzelbestimmung herangezogen. Neben der Intervallschachtelung und dem rationalen Ansatz gehört es zu den ältesten überlieferten Verfahren überhaupt.

Das Prinzip des Horner-Schemas ist in alten und neuen Lehrbüchern fast immer zu finden [Z 1; 832], [W 6; Kap 53]. Es soll daher nur eine kurze Einführung folgen:

Sei  $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i = 0$  und  $x_1$  eine Näherungswurzel, so hat man



$$f(x) : (x - x_1) = f_1(x) + \frac{f(x_1)}{x - x_1}, \text{ also } f(x) = f_1(x) (x - x_1) + f(x_1).$$

Grad  $f_1 = \text{Grad } f - 1$ . Dividiert man  $f_1(x)$  durch  $x - x_1$ , so wird nach dem gezeigten Schema gelten:

$$f_1(x) = f_2(x)(x - x_1) + f_1(x_1), \text{ Grad } f_2 = \text{Grad } f_1 - 1$$

...

$$f_{n-1}(x) = f_n(x)(x - x_1) + f_{n-1}(x_1), \text{ Grad } f_n = 0.$$

$$f_n(x) = f_n(x_1)$$

Setzt man nun rückschreitend  $f_i(x)$  in  $f_{i-1}(x)$  ein,  $i = 1, 2, \dots, n$ , so folgt:

$$f(x) = \left\{ \dots \left[ (f_n(x_1)(x - x_1) + f_{n-1}(x_1)(x - x_1) + f_{n-2}(x_1)) \right] (x - x_1) + \dots \right\} + f(x_1),$$

was gleichbedeutend ist mit

$$f(x) = f(x_1) + f_1(x_1)(x - x_1) + f_2(x_1)(x - x_1)^2 + \dots + f_n(x_1)(x - x_1)^n.$$

Gerade dies ist aber die Taylorentwicklung von  $f(x)$  nach  $x_1$ , sodaß man für die  $f_i(x_1)$ , die ja jeweils als Divisionsrest bleiben, hat:

$$f_1(x_1) = f'(x_1)$$

$$f_2(x_1) = \frac{1}{2} f''(x_1)$$

...

$$f_n(x_1) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_1).$$

Nun kann man aber  $f_{i+1}$  nach dem gezeigten Schema aus den  $f_i$  gewinnen, und zwar auf rein arithmetischem Weg, ohne Kenntnis des Binomialsatzes oder der Differentialrechnung. Mithin wurde durch die Entwicklung eine Verminderung (Vergrößerung falls  $x_1 < 0$ ) der Wurzeln von  $f(x)$  um  $x_1$  geleistet, was gleichbedeutend mit einer Nullpunktverschiebung um den Wert  $x_1$  ist.

Hierin mag auch ein Grund für die häufige Benützung des Horner-Schemas schon seit frühester Zeit sein. Durch die Wurzelverminderung erhält man zwar eine Gleichung von gleichem Grad wie die Ausgangsgleichung, wegen der Kleinheit der Wurzel  $w - x_1$  kann man aber leicht höhere Potenzen vernachlässigen. Hat man auf einem noch zu beschreibenden Weg eine Wurzelkorrektur  $r$  gefunden, mit  $|w - x_1| > |w - x_1 - r|$ , kann man den Rechenvorgang mit  $r$ , wenn die neue, transformierte Gleichung benützt, oder mit  $x_1 + r$  wiederholen, wenn das ursprüngliche  $f(x)$  benützt wird. Nach und nach treten Transformierte auf, deren Wurzeln solange verändert wurden, bis schließlich eine nahezu Null ist. Das heißt, daß die Summe aus  $x_1$  mit den nach mehreren Schritten gewon-

nenen  $r, q, \dots$  eine Näherungswurzel von  $f(x)$  ist.

Die erste Transformation,  $x \longrightarrow x - x_1$ , die wieder am Beispiel  $g(x) = 0$  gezeigt werden soll, sieht dann so aus (die Zeile mit den Produkten  $x_1 a'_i$  ist bereits weggelassen):

$$\begin{array}{rcl}
 a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\
 a_3 & a_3 x_1 + a_2 & x_1(a_3 x_1 + a_2) + a_1 & x_1(x_1(a_3 x_1 + a_2) + a_1) + a_0 = f(x_1) = A_0 \\
 a_3 & 2a_3 x_1 + a_2 & x_1(3a_3 x_1 + 2a_2) + a_1 & = f'(x_1) =: A_1 \\
 a_3 & 3a_3 x_1 + a_2 & = \frac{1}{2} f''(x_1) =: A_2 \\
 a_3 & = \frac{1}{3!} f'''(x_1) =: A_3
 \end{array}$$

Das transformierte Polynom heißt nun, wenn  $z = x - x_1$  ist:  $g_1(z) = \sum_{i=0}^3 A_i z^i$ .

Das möglicherweise älteste uns bekannte Auftreten eines Verfahrens, das sich als Horner-Schema interpretieren läßt, stammt aus der frühen Han - Zeit (China, 2. Jh. v. - 9. Jh. n.). Es ist uns in den "Neun Büchern arithmetischer Technik" (Chiu chang suan shu, um 250 v. Ch.), das nach Liu Huis (Mitte des 3. Jh. n.) Angaben von Chang Tsang (175 v.) nach alten Vorlagen verfaßt und durch Käng Shu ergänzt wurde, durch mehrere Aufgaben belegt [V 4]. In den Aufgaben werden Gleichungen von der Form

$$x^n - q = 0$$

gelöst [V 4; IV, 40-43]. Buch IX, Aufgabe 20, behandelt auch eine Gleichung des Typs

$$\langle h(x) \rangle = x^2 + (a+b)x = 2ac, \quad a, b, c \in \mathbb{Q}^+.$$

"Die im Text auftretenden Fachwörter 'Dividend' und 'ergänzter Divisor' zeigen, daß es sich um die hier nicht ausgeführte numerische Lösung der quadratischen Gleichung nach dem Horner - Schema handelt" [V 4; 100]. Führen wir mit einem Näherungswert  $x_1$  die erste Transformation durch, so gibt dies

$$\begin{array}{rcl}
 1 & a+b & -2ac \\
 1 & x_1 + a+b & x_1(x_1 + a+b) - 2ac \\
 1 & 2x_1 + a+b & \\
 1 & & 
 \end{array}$$

$x_1 (x_1 + a + b) - 2ac$  heißt der Divisor und  $2x_1 + a + b$  der ergänzte Divisor. Wie es zu diesen Bezeichnungen kommt, geht aus der Quotientenbildung hervor, die zur Wurzelverbesserung herangezogen wird. Die Aufgabe 19, Buch IV, lautet ins Moderne übertragen

$$f(x) = x^3 - 1860867 = 0$$

Die Zahl 1860867 =: N kann, wie es später auch Viète vorgeschlagen hat, so zerlegt werden:

$$N = (100u + 10v + w)^3$$

$$= (100u)^3 + (3(100u)^2 + 3 \cdot 100u \cdot 10v + (10v)^2) 10v + (3(100u + 10v)^2 + 3(100u + 10v)w + w^2)$$

$$[ \sqrt[4]{4;117} ]$$

Erst muß ein ganzzahliges  $u$  gefunden werden, mit  $u^3 \leq \frac{N}{10^6}$ , hier  $u = 1$ .

Mit  $100u$  als Multiplikator bauen die Chinesen nun das Horner - Schema auf. Sie benützen dazu ein Rechenbrett; das Schema liegt um  $90^\circ$  gedreht.

$$\begin{array}{rcl} 1 & 0 & 0 \quad N \\ 1 & 100u & (100u)^2 \quad \boxed{N - (100u)^3 = f(100u) = 860867} \\ 1 & 200u & 3(100u)^2 = f'(100u) = 30000 \\ 1 & 300u & = \frac{1}{2} f''(100u) = 300 \\ 1 & & = \frac{1}{6} f'''(100u) \end{array}$$

$10v$  finden sie mit Hilfe des Quotienten  $\frac{f(100u)}{f'(100u)} \approx 10v$ , welcher genau

dem beim Newton - Verfahren entspricht. Man bekommt  $v = 2$ . Die Transformierte hat die folgenden, wieder gemäß dem Horner - Schema angeschriebenen Koeffizienten:

$$\begin{array}{rcl} 1 & 300u & 3(100u)^2 \quad N - f(100u) \quad \text{Ferner sei } f(x - 100u) = g(z) \\ 1 & 300u & 3(100u) \quad N - f(100u) \\ 1 & 300u + 10v & 3(100u)^2 + (300u + 10v) 10v \quad \boxed{132867 = g(10v)} \\ 1 & 300u + 20v & 3(100u)^2 + 3(100u) 2(10v) + (10v)^2 = 42600 = g'(10v) \\ 1 & 300u + 30v & - 360 = \frac{1}{2} g''(10v) \\ 1 & & = \frac{1}{6} g'''(10v) \end{array}$$

Aus dem Näherungsbruch  $\frac{g(10v)}{g'(10v)}$  ergibt sich  $w = 3$ , das sich bei der Probe als exakt erweist.  $[V 4; 41 f]$

Anhand des Beispiels lassen sich folgende Ergebnisse ablesen:

1. Die Bezeichnung "Dividend" für den Funktionswert  $f(x_1)$  und "ergänzter Divisor" für die erste Ableitung an der gleichen Stelle, sind durch deren Verwendung beim Aufsuchen weiterer Wurzelkorrekturen geklärt.
2. Das tatsächlich angewandte Näherungsverfahren stellt sich im Prinzip als das von Newton heraus. Wegen der ganzzahligen Wurzeln bietet dieses aber nur grobe Abschätzungen. Es besteht die Möglichkeit, daß die Chinesen auf diese Weise auch irrationale Wurzeln aufsuchen konnten.
3. Die Zerlegung von  $N$  wird durch die Art wie beim Horner - Schema die Koeffizienten entstehen, gerechtfertigt.
4. Es wird  $g(z) = 0$ , das ja keine reine Gleichung mehr ist, mit dem gleichen Schema gelöst, wie reine Gleichungen. Damit darf man als erwiesen ansehen, daß in der Zeit, als die "Neun Bücher" geschrieben wurden, mit Hilfe des Horner - Schemas nicht nur radiziert, sondern auch gemischte Gleichungen gelöst werden konnten.

Es läßt sich nur vermuten, weshalb man das Horner - Schema dem Verfahren mit Binomialentwicklung vorzog. Zum einen kann man beim Horner - Schema auf die möglicherweise umständlich zu berechnenden Potenzen von  $a + b$  verzichten, und zum anderen ist die Schreibweise (oder Denkweise)

$$f(x) = (a_2x + a_1)x + a_0$$

ebenso naheliegend wie

$$f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0.$$

Erstere führt aber auf das Horner - Schema und tritt bei der Polynomdivision auf, welche den Chinesen bekannt war (siehe S. 34 f.). J.E. Hofmann vertrat die Ansicht, daß sich das Horner - Schema bei den Chinesen aus der Umkehrung der Formel

$$(a+b+c)^2 = a^2 + (2ab+b)^2 + (2(a+b)c + c^2) = a^2 + (2a+b)b + (2(a+b)+c)c$$

entwickelt hat  $[H 7; 1, 74]$ .

Das Horner - Schema tritt dann in der chinesischen Mathematik immer wieder auf, und um 1245 finden wir bei Ch'iu Chiu-shao die Gleichung

$$-x^4 + 763200x^2 - 406425600000 = 0$$

nicht etwa als quadratisch in  $x^2$  gelöst, sondern als biquadratisch mit Hilfe des Horner - Schemas  $[M 4; 74 ff]$ .

Bei den Indem kommt das Horner - Schema , auch abgewandelt , offenbar nicht vor. Erst bei den Arabern ( 750 - 1300 ) wird es wieder ein wichtiges Instrument der numerischen Mathematik, wobei es gleichberechtigt neben dem binomischen Lehrsatz zum Radizieren dient [ L 13 ] .

1804 hat Paolo Ruffini ( 1765 - 1822 ) aus Modena, das Horner - Schema , so wie es eingangs erklärt wurde , wiederentdeckt [ R 4 ] . Vor Ruffinis Entdeckung war bekannt, daß man ein Polynom so umordnen kann, wie dies bei der Berechnung mit dem Horner - Schema der Fall ist. Das folgende Beispiel stammt von Newton, etwas ähnliches findet man auch bei Descartes [ D 4; 73 -78 ] :

$$y^4 - 4y^3 + 5y^2 - 12y + 17 = \left\{ [(y - 4)y + 5] y - 12 \right\} y + 17 = 0 .$$

Newton bemerkt dazu, daß man eine Probe durchführen kann, um zu sehen, wie weit ein gefundener Näherungswert die Gleichung erfüllt. Dazu müsse man eine Gleichung suchen, deren Wurzeln um den Näherungswert vermindert sind. Diese hierfür benötigte Substitution, z.B.  $y = 3 + p$  , läßt sich bequem durchführen, wenn die Gleichung in der obigen Form angeordnet ist [ N 2; 222 f ] . Genau das ist aber die Form, wie beim Horner - Schema die Funktionswerte berechnet werden. Im Jahre 1807 hatte Budan de Bois Laurant ein dem Horner - Schema völlig analoges Verfahren im Appendix seiner von ihm herausgegebenen "Arithmetique" von Charles Hutton ( Edinburgh , 1807 ) benützt.

Ruffini erhielt für seine Arbeit " Sopra la determinazione delle radici nelle equazioni numeriche di qualunque grado " von der Italienischen Akademie der Wissenschaften eine Goldmedaille. Offensichtlich war zu Beginn des 19. Jh. der Mangel an einem praktischen Verfahren, numerische Gleichungen zu lösen, besonders stark empfunden worden. Nun behebt das Ruffini - Horner - Schema , wie es auch genannt wird, diesen Mangel nicht ganz, aber es ermöglicht sehr rasch Gleichungen zu transformieren. Dabei treten vor allem die Ableitungen auf, welche zu berechnen die Hauptarbeit beim Newton - Verfahren ist.

Ruffini leitet sein Schema von vorneherein mit Hilfe der Differentialrechnung her. Die Approximation selbst geschieht nach dem Newtonschen und dem Halleyschen Prinzip; bei engliegenden Wurzeln wird ein Separationsverfahren vorausgeschickt.

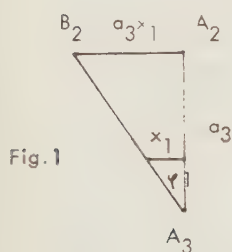
Die Arbeit von Horner ist der Ruffinischen so ähnlich, daß hier nicht weiter darauf eingegangen werden muß [ H 8 ] .

Es kommt in der Mathematikgeschichte öfters vor, daß nahezu gleichzeitig und unabhängig voneinander dieselben Verfahren entwickelt werden, oder verschiedene Mathematiker gleiche Probleme lösen. Beispiele sind die Anfänge der Gruppentheorie oder der Algorithmus nach Ruffini und Horner. Gründe dafür können Preisfragen von wissenschaftlichen Akademien sein, welche dringliche Probleme aufgreifen. Weshalb plötzlich das Horner - Schema um die Jahrhundertwende wiederentdeckt wurde, könnte, neben dem Bedarf an geeigneten Näherungsverfahren, auch seinen Grund in den Bestrebungen von Lagrange und anderen Mathematikern der Zeit haben. Diese waren bemüht den Differentialquotienten ohne infinitesimale Betrachtungen rein formal als "Ableitung" einzuführen. Daß dies für Polynomgleichungen durch das Horner - Schema leicht geschehen kann, ist offensichtlich.

Für die Geschichte des Horner - Schemas im 19. Jh. gibt es eine Abhandlung von Cajori [C 3]. Darin wird Giusto Bellavitis (1803 - 1880) von der Universität Padua die Erstarbeit über die Anwendung des Horner - Schemas für komplexe Wurzeln zugeschrieben [B 2].

Obwohl graphische Methoden im allgemeinen in dieser Arbeit nicht behandelt werden, wollen wir doch das Verfahren von Lill (1867) schildern, weil es nichts anderes ist, als die geometrische Ausführung des Horner - Schemas, d.h. es gestattet den Wert eines Polynoms  $f(x)$  für ein gegebenes Argument  $x_0$  zu konstruieren. Für die Darstellung beschränken wir uns auf ein Polynom dritten Grades:

$$f(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = ((a_3 x^3 + a_2)x_1 + a_1)x_1 + a_0.$$



Wir zeichnen  $a_3 x_1$  folgendermaßen:

Wir tragen von  $A_3$  aus nach oben die Strecke  $a_3 = A_3 A_2$  ab. An diese Strecke tragen wir in  $A_3$  den Winkel  $\psi$  an, der aus  $\tan \psi = x_1$  zu bestimmen ist, und in  $A_2$  einen rechten Winkel. Als Schnittpunkt der freien Schenkel erhalten wir  $B_2$ , und es ist  $B_2 A_2 = a_3 x_1$  (Fig. 1).

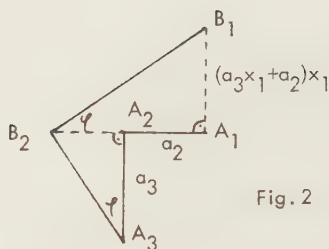


Fig. 2

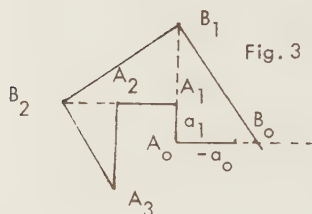


Fig. 3

Wir tragen nun auf  $B_2A_2$  die Strecke  $a_2$  ab, von  $A_2$  aus nach rechts, wenn  $a_2 > 0$ , nach links, wenn  $a_2 < 0$ , jedenfalls so, daß

$B_2A_2 = a_3x_1 + a_2$  wird. Wir konstruieren  $B_1$  wie aus Figur 2 ersichtlich, also indem wird in  $B_2$  an  $A_3B_2$  einen rechten Winkel antragen.

Der Winkel  $\varphi$  braucht hier nicht benutzt werden.

Dann wird  $A_1B_1 = (a_3x_1 + a_2)x_1$ . So fortfahrend erhalten wir  $A_0B_0 = ((a_3x_1 + a_2)x_1 + a_1)x_1$ .

Falls diese Strecke  $= -a_0$  ist, dann ist  $x_1$  eine Nullstelle von  $f(x)$  (Fig. 3). Andernfalls sieht

man die Größe der Abweichung und kann rein konstruktiv durch Änderung des Winkels  $\varphi$ , der ja von  $x_1$  abhängt, die Nullstelle approximieren. Allgemein sieht die graphische Lösung so aus:

Wenn  $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i = 0$  gegeben ist, zeichnet man einen rechtwinkligen

Polygonzug  $A_n A_{n-1} \dots A_0$ , wobei  $A_i A_{i-1} = a_i$ . Das Vorzeichen der  $a_i$  kommt durch ihre Lage zum Ausdruck. Dabei werden, angefangen bei  $a_n$ , die  $a_i$  rechtwinklig zueinander im Uhrzeigersinn angetragen falls  $a_i > 0$  und jeweils entgegengesetzt, falls  $a_i < 0$ .  $a_i = 0$  ändert an der Anordnung nichts. Den Streckenzug  $B_{n-1} B_{n-2} \dots B_0$  erhält man so: Um die Strecke  $a_n x_1$  zu konstruieren braucht man ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten  $a_n$  und  $a_n x_1$  und den Winkel bei  $A_n$  mit  $\tan \varphi = x_1$ . Mit  $a_n x_1$  hat man aufgrund der Anordnung zugleich  $a_n x_1 + a_{n-1}$ . Für die Strecke  $(a_n x_1 + a_{n-1}) x_1$  kann man die Konstruktion wiederholen und findet den Punkt  $B_{n-2}$ . Der Polygonzug  $B_{n-1} \dots B_0$  ist also dadurch festgelegt, daß die rechtwinkligen Dreiecke  $A_n A_{n-1} B_{n-1}$  und  $B_{i-1} A_{i-1} B_{i-1}$  ähnlich sind. Somit kann die Strecke

$A_0 B_0 = (\dots ((a_n x_1 + a_{n-1}) x_1 + a_{n-2}) x_1 \dots) x_1$  und  $f(x_1) = A_0 B_0 + a_0$  sein. War  $x_1$  richtig bemessen, so ist  $A_0 B_0 = -a_0$ , d.h.  $B_0$  liegt auf dem

Ende der Strecke  $a_0$ . Ist  $x_1$  nur ungefähr richtig, so bleibt eine Abweichung, und man muß einen neuen Streckenzug  $C_{n-1} C_{n-2} \dots C_0$ , ausgehend von  $\tan \varphi = x_1 + r$ , zeichnen.

Um einen zweiten Streckenzug festzulegen, würde man heute transparentes Millimeterpapier benutzen. Lill schlägt aber die Verwendung eines von ihm dafür entwickelten Instruments vor (Nouvelles Annales de Mathématiques, T. VI, 2<sup>e</sup> série, 1867). Lills Verfahren ist ein Hilfsmittel, um rasch erste Näherungen zu erhalten, welche dann mit einem Iterationsverfahren verbessert werden. Für algebraische Gleichungen hatte man damit ein bequemes Lösungsverfahren, das zudem für fachfremde Praktiker einfacher zu benutzen war, als etwa das Sturm'sche Separationsverfahren.

Lill nimmt die Entdeckung offensichtlich für sich in Anspruch. Tatsächlich schreibt Eutokios bereits Platon ein völlig analoges Verfahren zu. Das Problem der Würfelverdopplung führt auf eine kubische Gleichung. Ist  $a$  die Seite des gegebenen Würfels, so ist  $x$  die Seite des doppelten, also

$$(+)\quad x^3 = 2a^3.$$

Seit Hippokrates von Chios (um 440 v. Ch.) war bekannt, daß durch die Konstruktion zweier mittlerer Proportionalen zu zwei Strecken  $a$  und  $b$ , das (Delische) Problem gelöst werden kann:

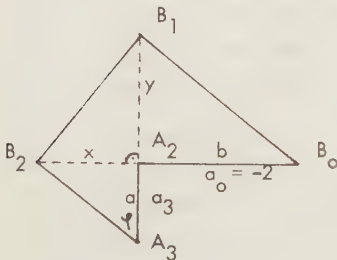
$$a : x = x : y = y : b.$$

Es gilt dann nämlich

$$(1)\quad ay = x^2 \quad (2)\quad bx = y^2 \quad (3)\quad xy = ab$$

Aus (1) und (3), (2) ist dann ebenfalls erfüllt, folgt aber  $x^3 = a^2b$ , und für  $b = 2a$  ergibt sich (+).

Die Konstruktion von  $x$  und  $y$  kann u. a. so durchgeführt werden [E 8; 56 f] :



Mit Hilfe von Rechtwinkelhaken und verschiebbaren Linealen wird die nebenstehende Figur gezeichnet. Dabei ist  $a \perp b = 2a$  gegeben. Auf den Verlängerungen der beiden Schenkel sind vom Scheitel aus  $x$  und  $y$  so zu suchen, daß  $A_3B_2$  und  $B_0B_1$  senkrecht auf  $B_2B_1$  stehen. Ist dies (natürlich nur näherungsweise) der Fall, so gilt

$$a : x = x : y = y : b.$$

Ohne Einschränkung dürfen wir  $a = 1$  setzen und das Problem so anschreiben:

$$f(x) = x^3 - 2 = 0.$$

Mit den Bezeichnungen von vorhin gilt  $a_3 = 1$ ,  $a_2 = a_1 = 0$ ,  $a_0 = -2$ . Führt man die Näherungslösung nach Lill aus, erkennt man, daß die gleiche Figur entsteht. Dabei ist  $a_3 = a$  und  $a_0 = b$ ; die Bezeichnung der Ecken bleibt erhalten. Als Lösung kommt  $\varphi \approx 51,5^\circ \Rightarrow \tan \varphi = x_1 \approx 1,26$  heraus.

Rund 110 Jahre vor der Arbeit Lills, wurde von Johann Andreas Segner (1704 - 1777) in Petersburg eine Abhandlung über den gleichen Gegenstand veröffentlicht [5 6]. In modernen Lehrbüchern für Praktiker wird das Verfahren weder erwähnt noch empfohlen, obwohl es ebensoviel leistet wie das von Lill. Auch bei Segner steht das Bemühen erste Näherungen für die ihm relevant erscheinenden Approximationsverfahren (Newton, Raphson, Halley [5 6; 211]) zu finden im Vordergrund, und auch bei ihm spielt die Darstellung eines Polynoms wie in der ersten Zeile des Horner - Schemas eine Rolle. Man kann sich auf die Erläuterung an Hand einer Gleichung dritten Grades beschränken.

Die Gleichung  $f(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$

sei zu lösen. Um möglicherweise nötige Maßstabsänderungen vornehmen zu können, setzt man  $x = z m^{-1}$  mit fest gewähltem  $m$  und zeichnet in einem Koordinatensystem eine Graphik mit folgenden Bezeichnungen <sup>+) (Figur S. 44):</sup> Auf der y-Achse werden die Punkte A, B, C, D abgetragen, wobei

$$OD = a_0, DC = a_1, CB = a_2, BA = a_3, \text{ also } OA = a_0 + a_1 + a_2 + a_3.$$

Die Orientierung der Strecken ist durch die Vorzeichen der  $a_i$  gegeben. Auf der x-Achse findet man den Punkt Q durch  $OQ = m$ , welches man z.B. gleich der Einheit wählt.  $z = mx$  sei eine Näherungswurzel und  $z = OS$ . In Q und S werden jeweils Lot errichtet, und auf dem Lot über Q wird die Strecke  $Qa = OA$  abgetragen. Nun folgt die Konstruktion von  $f(\frac{z}{m})$ .

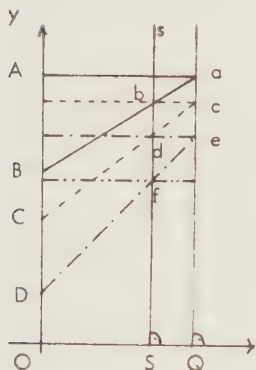
Ba, geschnitten mit dem Lot über S ( $=: s$ ) ergibt den Schnittpunkt b,

$$b \in pc \parallel Aa, Cc \cap s = d, d \in qe \parallel Aa, De \cap s = f, fr \parallel Aa;$$

p, q, r liegen auf der y-Achse und a, c, e auf dem Lot über Q. Daß die

<sup>+)  $m \neq 1$  bewirkt in der Zeichnung eine Dehnung oder Streckung längs der x-Achse.</sup>

Strecke  $Sf = f(\frac{z}{m}) = f(x)$  ist, zeigt Segner so:



$$Aa : pb = a_3 : Bp = \frac{m}{z} \implies Bp = a_3 x$$

$$Cp = Bp + a_2 = a_3 x + a_2$$

$$pc : qd = Cp : Cq = \frac{m}{z} \implies Cq = (a_3 x + a_2) x$$

$$Dq = Cq + a_1 = (a_3 x + a_2) x + a_1$$

$$qe : fr = Dq : Dr = \frac{m}{z} \implies Dr = ((a_3 x + a_2) x + a_1) x$$

$$Sf = Or = Dr + a_0 = ((a_3 x + a_2) x + a_1) x + a_0$$

$$= f(x)$$

( Die letzte Zeile entspricht wieder der ersten des Horner - Schemas .)

Da  $f(m) = Qa$ ,  $f(0) = OD$  und  $f(x) = Sf$ , hat man schon einige Anhaltspunkte über einen möglichen Verlauf der Funktionskurve. Man muß jetzt solche Strecken  $OS$  suchen, daß  $Sf = 0$  wird. Dies kann man umso leichter, wenn mit Fortgang der Näherungsversuche immer mehr bekannt gewordene Punkte des Funktionsgraphen in das Koordinatenkreuz gleich eingesetzt werden.

#### 4. Näherungslösungen mit Hilfe von Kettenbrüchen

Die erste uns bekannte Anwendung absteigender Kettenbrüche beim Radizieren, findet sich bei dem Italiener Pietro Antonio Cataldi ( 1552 - 1626 ), der zu Beginn des 17. Jh. als Professor für Mathematik in Bologna lebte [C 7].<sup>+)</sup>

Nach Angabe von [G 9] geht Cataldi so vor: Bei der Berechnung einer irrationalen Quadratwurzel ist  $\sqrt{N} = x$  zu lösen. Man sucht nun diejenige ganze Zahl, deren Quadrat möglichst nahe bei  $N$  liegt. Man hat also

$$\sqrt{N} = \sqrt{a^2 + b} = a + c.$$

Daraus folgt  $a^2 + b = a^2 + (2a + c)c$  und

$$(1) \quad c = \frac{b}{2a + c}.$$

Dabei darf vorausgesetzt werden, daß Cataldi die Näherung  $\sqrt{a^2 + b} \approx a + \frac{b}{2a}$  bekannt war. Mit (1) ergibt sich als Lösung

<sup>+) nach [G 9] und [L 9, 87]</sup>

$$(2) \quad \sqrt{N} = a + \frac{b}{2a+c}.$$

Setzt man (1) wiederholt in (2) ein, entwickelt sich daraus ein Kettenbruch:

$$\sqrt{N} = a + \frac{b}{2a + \frac{b}{2a + \frac{b}{2a + \dots}}}$$

Das von Cataldi vorgestellte Beispiel für  $\sqrt{18}$  sieht so aus  $[L 9; 87]$  :

$$4 + \frac{2}{8} + \frac{2}{8} + \frac{2}{8} \dots$$

Die Punkte hinter 8 bedeuten, daß es sich um keine gewöhnliche Addition handelt, sondern um die Addition eines Bruches mit dem Nenner des Vorgängerbruches. Das ist die Darstellung eines Kettenbruches bei Cataldi. Der ins Dezimale umgerechnete Wert lautet  $4,242647$ , und ist mit einem Fehler von nur  $6,6 \cdot 10^{-6}$  behaftet.

Für die Auflösung algebraischer Gleichungen hat Lagrange die Methode bekannt gemacht und, man darf sagen, wiederentdeckt, wenngleich damals ein Kettenbruch für die Kreiszahl  $\pi$  bereits gefunden war. Es soll deshalb die Methode so vorgestellt werden, wie dies Lagrange 1767 in seiner Arbeit "Sur la Résolution des Equations Numériques" [L 4; §3] getan hat.

Sind die Wurzeln einer Gleichung  $f(x) = 0$  bereits getrennt, und ist  $w$  die zu approximierende Wurzel aus  $\mathbb{R}$ , so sucht man durch Probieren ein  $p$  mit  $p < w < p+1$ . Indem man  $x_1 = p + \frac{1}{y}$  setzt, vermindert man alle Wurzeln um  $p$  und erhält eine Gleichung

$$g\left(\frac{1}{y}\right) = 0$$

mit wenigstens einer Wurzel  $w-p$  zwischen 0 und 1. Diese Gleichung erhält man so:

$$g\left(\frac{1}{y}\right) = f\left(p + \frac{1}{y}\right) = f(p) + f'(p) y^{-1} + \frac{1}{2} f''(p) y^{-2} + \dots = 0.$$

Wenn  $n$  der Grad von  $f$  ist, gilt

$$g\left(\frac{1}{y}\right) y^n = f_1(y) = f(p) y^n + f'(p) y^{n-1} + \frac{1}{2} f''(p) y^{n-2} \dots = 0.$$

$f_1(y)$  hat somit  $(w-p)^{-1}$  als Wurzel, und diese wird größer als 1 sein.

(Ein Beispiel:  $f(x) = x^3 - 2x - 2 = 0$  hat die Lösung  $w = 1,769292 \dots$ , so daß man  $p = 1$  gefunden hätte.

$g(\frac{1}{y}) = 0$  hat  $w - p = 0,769292\dots$  als Lösung, und deshalb ist

$$f_1(y) = -3y^3 + y^2 + 3y + 1 = 0 \text{ für } (w - p)^{-1} = 0,769292\dots^{-1} = 1.2998962\dots)$$

Mit der Wurzel  $(w - p)^{-1}$  verfährt man genauso. Man sucht wieder die nächsten gelegenen ganze Zahl  $q$ , so, daß  $q < (w - p)^{-1} < q + 1$  ist.

$(w - p)^{-1} = q + \frac{1}{z}$  gesetzt, führt  $f_1(y)$  über in  $f_1(p + z^{-1})$ .

Multiplikation mit  $z^n$  ergibt:

$$f_2(z) = f_1(q) z^n + f'(q) z^{n-1} + \frac{1}{2} f''(q) z^{n-2} + \dots = 0.$$

Setzt man den Lösungsweg auf diese Weise fort, erhält man einen Kettenbruch

$$w = p + \frac{1}{q + \frac{1}{r + \frac{1}{s + \dots}}},$$

dessen Näherungsbrüche  $p = \frac{a_1}{a'_1}$ ;  $p + q^{-1} = \frac{a_2}{a'_2}$ ;  $p + \frac{1}{q + \frac{1}{r}} = \frac{a_3}{a'_3}$ , usw.,

abwechselnd von links und rechts her die Wurzel  $w$  approximieren.

Das von Cataldi angegebene Beispiel würde nach Lagrange so berechnet werden:

$\sqrt{18}$  ist eine Lösung von  $f(x) = x^2 - 18 = 0$ . Also  $p = 8$ , und mit  $x = 4 + \frac{1}{y}$

folgt daraus  $f_1(y) = -2y^2 + 8y + 1$ .

Die nächste Zahl aus  $\mathbb{Z}$ , die kleiner als  $y$  ist, ist  $q = 4$  (oder  $-1$ ), d.h.

$$\sqrt{18} = 4 + \frac{1}{4 + \frac{1}{z}}.$$

$$f_2(z) = z^2 - 8z - 2,$$

woraus folgt:  $[z] = r = 8$  (oder  $-1$ ) und

$$\sqrt{18} = 4 + \frac{1}{4 + \frac{1}{8 + \frac{1}{v}}}.$$

$$f_3(v) = -2v^2 + 8v + 1,$$

woraus folgt:  $[v] = s = 4$  (oder  $-1$ ) und

$$\sqrt{18} = 4 + \frac{1}{4 + \frac{1}{8 + \frac{1}{4 + \frac{1}{u}}}}$$

usw. .

Man braucht nur den Näherungsbruch von Cataldi zu kürzen, um die gleiche Entwicklung festzustellen:

$$4 + \frac{1}{8 + \frac{2}{8 - \frac{2}{8}}} = 4 + \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{8 \cdot \frac{1}{2} + \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{8 + \frac{2}{8}}} = 4 + \frac{1}{4 + \frac{1}{8 + \frac{1}{4}}}.$$

Da die Näherungsbrüche des Kettenbruches abwechselnd groer und kleiner als die Wurzel  $w$  sind, kann man bei jedem Schritt der Grad der Annäherung angeben, was beim Newton - Verfahren nicht der Fall ist. Es ist

$$\delta := \left| \frac{a_i}{a'_i} - w \right| \leq \left| \frac{a_i}{a'_i} - \frac{a_{i+1}}{a'_{i+1}} \right| =: d$$

Nun ist, wie Lagrange zeigt,

$$\left| a_i a'_{i+1} - a_{i+1} a'_i \right| = 1$$

also 
$$d = \frac{1}{a'_i a'_{i+1}}.$$

Wenn wir annehmen, daß nur der  $i$ -te, aber nicht der  $(i+1)$ -te Näherungsbruch berechnet wurde, stört das  $a'_{i+1}$ . Da aber die Nenner der Näherungsbrüche wachsen, ist  $a'_{i+1} > a'_i$ , also

$$\delta \leq d < \frac{1}{a'^2_i}.$$

Der Fehler ist kleiner als 1 dividiert durch das Quadrat des Nenners des Nherungsbruches.

Imaginäre Wurzeln, die durch  $a + i b$  ausgedrückt sind, werden in derjenigen Gleichung  $f_d(x^2) = 0$  erkennbar, die als Wurzeln die Quadrate der Differenzen der Nullstellen von  $f(x)$  hat (vgl. S.85). Wie  $f_d$  relativ bequem gefunden wird, zeigt Lagrange ausführlich in [L 4; § 1, Abs.8]. In  $f_d(x^2)$  sind die Differenzencquadrate reeller Wurzeln positiv, und diejenigen, in denen komplexe Wurzeln enthalten sind, negativ. Das gibt folgende Möglichkeiten:

$a, b, c, d \in \mathbb{R},$

$$(c - (a + i b))^2 = (c - a)^2 - b^2 - i 2(c - a)b = \quad \quad \quad - b^2$$

(falls  $a = c$ )

$$((a + ib) - (a - ib))^2 = -4b^2, \quad ((a \pm ib) - (a \mp id))^2 = -(b+d)^2$$

$$\text{und } ((a \pm ib) - (a \pm id))^2 = -(b-d)^2.$$

Negative Wurzeln von  $f_d$  treten also paarweise oder einzeln auf. Wenn eine negative Wurzel einfach vorkommt, weiß man, daß sie die Form  $-4b^2$  hat. Daraus läßt sich (unter Umständen nur näherungsweise)  $b$  bestimmen. Substituiert man  $a + ib$  in  $f(x) = 0$ , so folgt:  $f(x) = g(a, b) + i h(a, b) \implies g(a, b) = h(a, b) = 0$ , wobei sich  $g$  und  $h$  nach bekannten Einsetzungsalgorithmen ergeben. Da  $b$  bereits als bekannt gilt, kann man  $a$  näherungsweise, etwa mit der Kettenbruch-Methode bestimmen [L 4; §2, Abs. 16 f].

Fälle von Mehrfachwurzeln behandelt Lagrange z.T. schon in der eben zitierten Arbeit und 1770 in den "Additions au mémoire sur la résolution des équations numériques" [Werke Bd. 2, ed. Serret, S.581 - 652]. Die Zusammenfassung dieser beiden Arbeiten und Vereinfachungen für die Rechenpraxis erschienen dann im Hauptwerk über numerische Gleichungen [L 3].

Der von Lagrange vorgeschlagene Lösungsweg erfaßt zwar theoretisch alle Probleme, erlangte aber für die praktische Durchführung, bei der die Bequemlichkeit im Vordergrund steht, trotz Vereinfachungen, keine Bedeutung. Die weitere Entwicklung hat dies auch gezeigt.

Eine Bearbeitung der Kettenbruch-Methode ist im "Exposé synoptique" von Fouriers "Analyse des Equations" [F 1; 33 ff] angekündigt, aber wegen des Todes von Fourier 1830 nicht mehr erschienen. Allerdings gehen die Andeutungen Fouriers nicht so sehr auf den Näherungsprozess durch einen Kettenbruch ein, sondern auf Hilfsmittel, z.B. eine geschickte Anwendung der Descarteschen Zeichenregel, welche die Kettenbruch-Methode praktikabler machen. Moritz Stern hat die Anregungen Fouriers aufgegriffen und bewiesen [S 10; § 75 ff].

Bezeichnend für den Entwicklungsstand der Näherungsverfahren zu Anfang des 19. Jh., ist die prinzipielle Bemerkung Sterns über Näherungsverfahren, die sich an die Kettenbruch-Methode und deren Hilfsverfahren anschließt [S 10; 124]:

"Denn hat man durch das Theorem A <Zeichenregel> gefunden, daß eine oder mehrere Wurzeln der Gleichung  $f(x) = 0$  zwischen den Gränzen  $\alpha$  und  $\beta$  enthalten sind, so ist  $\alpha$  ein Näherungswert von  $x$ . Setzt man den noch unbekannten Theil des Werthes der Wurzel gleich  $x_1$ , so kann man  $x$  als eine Funktion der Größen  $\alpha$  und  $x_1$  ansehen und daher  $x = F(\alpha, x_1)$  setzen. Substituiert man diesen Werth von  $x$  in  $f(x) = 0$ , so erhält man eine neue Gleichung

$\varphi(x_1) = 0$ , und man kann vermöge Theorem A wieder Gränzen  $\alpha_1, \beta_1$  bestimmen, innerhalb welcher  $x_1$  liegt. "...Die Frage, wie man sich dem wahren Werthe immer mehr nähern kann, kommt also darauf zurück, mit Hilfe des Theorems A einen continuirlichen Ausdruck zu finden, der sich der Wurzel desto mehr nähert, je mehr Glieder desselben man zusammen nimmt. Da es aber unendlich viele continuirliche Formen giebt, so giebt es auch unendlich viele Näherungsmethoden; die Hauptformen sind auch hier wieder die unendlichen Produkte, die unendlichen Reihen und die Kettenbrüche."

Etwa zur gleichen Zeit wie Sterns Arbeit erschien eine Abhandlung von Vincent ( 1797 - 1868 ), die versucht die " Schnelligkeit " der Newtonschen mit der "Sicherheit" der Lagrangeschen Methode zu verbinden [V 3]. Dazu wird zunächst mit Hilfe der Kettenbruchmethode und eines einfachen Separationsverfahrens eine Wurzel separiert ( siehe Verfahren von Budan S. 39 ), und mit einem Näherungswert dieser Separierten startet man das Newton - Verfahren.

Einen Vergleich über die Konvergenzgeschwindigkeit der Verfahren von Newton und Lagrange zeigt folgendes Beispiel :

Die Wurzelnäherung  $1,769292$  von  $f(x) = x^3 - 2x - 2 = 0$  ergibt sich nach Lagrange in 7 Schritten, wobei der Reihe nach folgende Gleichungen auftreten:

$$\begin{array}{ll}
 f(x) = 0 & \\
 3x^3 - x^2 - 3x - 1 = 0 & : f_1 \quad (\text{Alle Gleichungen weisen nur} \\
 2x^3 - 4x^2 - 8x - 3 = 0 & : f_2 \quad \text{einen Zeichenwechsel auf, was auf} \\
 9x^3 - 22x^2 - 14x - 2 = 0 & : f_3 \quad \text{das Vorhandensein von nur einer} \\
 46x^3 - 6x^2 - 32x - 9 = 0 & : f_4 \quad \text{positiven reellen Wurzel schließen} \\
 x^3 - 94x^2 - 132x - 46 = 0 & : f_5 \quad \text{läßt .)} \\
 3561x^3 - 9083x^2 - 191x - 1 = 0 & : f_6
 \end{array}$$

Die sich zuletzt ergebenden Näherungsbrüche lauten  $1,7692926$  und  $1,7929228$ . Das Verfahren von Newton - Raphson liefert den bis zur 6. Dezimale richtigen Wert bereits nach zwei Schritten. Sowohl nach Lagrange, als auch nach Newton - Raphson muß man wissen, daß  $1 < w < 2$  ist, also  $x_1 = 1,7$ .

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1,77301 \dots$$

mit  $x_1 = 1,77$  erhält man  $x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 1,7692928 \dots$

Eine letzte hier zu nennende Betrachtung über Kettenbrüche stammt von Siegmund Günther und behandelt den Zusammenhang mit Determinanten [G 8] .

## VII. Berechnungen der Potenzen der Gleichungswurzeln und daraus abgeleitete Verfahren

### 1. Bernoulli-Verfahren mit rekurrenten Folgen

Rekurrente Folgen sind solche, deren allgemeines Glied  $a_n$  sich linear aus einer bestimmten Anzahl vorangehender Glieder  $a_i$ ,  $n-k \leq i \leq n-1$ , darstellt. Diese erstmals von de Moivre ( 1667 - 1754 ) gefundenen, und in einer Arbeit von 1722 als rekurrent bezeichneten Folgen bzw. Reihen [S 3; 258] , eignen sich zur Näherung von Wurzeln algebraischer Gleichungen, wenn mit diesen Folgen Potenzsummen der Wurzeln erzeugt werden.

In einem Brief von Nikolaus I Bernoulli ( 1687 - 1759 ) an Pierre Rémond de Montmort ( 1678 - 1719 ) vom 1.4.1719 [B 4] ( zit. nach [S 3; 264] ), in dem Fragen zu rekurrenten Folgen besprochen werden, steht ein spezielles Beispiel zur später nach Daniel Bernoulli ( 1700 - 1782 ) benannten Methode.

" Die Glieder  $\langle a_i \rangle$  einer Folge, deren Kennzeichen gleich  $m + n$  ist,  $\langle \text{rek.F. } (a_i \mid a_{i+1} = m a_i + n a_{i-1}) \rangle$ , dienen dazu, durch Näherung die Quadratwurzel von  $mm + 4n$  zu finden, denn wenn man zwei aufeinanderfolgende Glieder  $\langle a_i, a_{i+1} \rangle$  nimmt, so nähert sich das Doppelte des zweiten, dividiert durch das vorangehende, minus  $m$   $\langle 2 a_{i+1} a_i^{-1} - m \rangle$  der Wurzel aus  $mm + 4n$  umso mehr, als die Indizes  $\langle i \rangle$  der Glieder immer größer werden. Mein Onkel  $\langle \text{Johann I Bernoulli ( 1667 - 1748 )} \rangle$  hat mir vor längerer Zeit Gelegenheit gegeben, diese Feststellung zu machen, indem er mir erklärte, daß die Glieder dieser Reihe  $1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13 + \text{etc.}$  die Wurzel aus 5 ergeben ."

Gemeint ist damit, daß

$$(1) \quad \lim_{i \rightarrow \infty} (2 a_{i+1} \cdot a_i^{-1} - m) = \sqrt{m^2 + 4n} \quad .$$

Ob Nikolaus die Lösung einer quadratischen Gleichung damit gesucht hat, geht aus dem Briefausschnitt nicht hervor. Trotzdem wäre es möglich gewesen zu er-

kennen, daß (1) äquivalent

$$\lim_{i \rightarrow \infty} a_{i+1} a_i^{-1} = \frac{m}{2} + \sqrt{\frac{m^2}{4} + n} \quad \text{ist.}$$

Letzteres ist aber die größere Wurzel der Gleichung  $x^2 - m x - n = 0$ .

Aus der Rekursionsformel  $a_{i+1} = m a_i + n a_{i-1}$  folgt

$$(+) \quad \frac{a_{i+1}}{a_i} = m + n \frac{a_{i-1}}{a_i},$$

und wenn  $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{a_{i-1}}{a_i} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{a_i}{a_{i+1}} = x^{-1}$  existiert, wird aus (+)

$$x = m + \frac{n}{x} \quad \text{oder} \quad x^2 = m x + n.$$

Nun kann man  $a_1$  und  $a_2$  nahezu beliebig, zweckmäßigerweise klein wählen.

Die Andeutung, daß die Glieder der Reihe  $1 + 1 + 2 + 3 + \dots$  gerade  $\sqrt{5}$  ergeben, ist so zu verstehen: Für  $m = n = 1$  ergibt sich die Rekursionsformel  $a_{i+1} = a_i + a_{i-1}$  mit der Folge  $a_1 = 1$ ;  $a_2 = 1$ ;  $a_3 = 2$ ;  $a_4 = 3$ ;  $a_5 = 5$ ; usw.  $a_{11} = 144$  und  $a_{12} = 233$ . Damit ist

$$\frac{2 a_{12}}{a_{11}} - m = 2,236111 \dots,$$

ein Wert, der sich von  $\sqrt{m^2 + 4n} = \sqrt{5}$  um weniger als  $5 \cdot 10^{-5}$  unterscheidet.  
(Die Begriffe "Reihe" und "Folge" werden zu dieser Zeit öfters gleich benützt.)  
Dieses Beispiel hat später auch Daniel Bernoulli wieder aufgegriffen [B 3; 89].

Bereits früher hatte Daniel Bernoulli in einem Brief an Christian Goldbach (1690 - 1764) vom 18.3.1724 [H 6; 160], als Antwort auf dessen Untersuchungen mit rekurrenten Folgen Quadratwurzeln zu approximieren, selbst  $\sqrt{4k+1}$  mit Hilfe der rekurrenten Folgen  $(a_i \mid a_{i+1} = a_i + k a_{i-1})$  anzunähern versucht. Dazu hat er festgestellt, daß

$$(2) \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{a_i + a_{i+1}}{a_{i-1}} - (k+1) = \sqrt{4k+1}.$$

Hier schließt sich, von Daniel Bernoulli selbst ausgeführt, die Überlegung an, daß (2), wenn  $a_{i+1} = a_i + k a_{i-1}$  gesetzt wird, gleichbedeutend mit

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{2 a_i}{a_{i-1}} - 1 = \sqrt{4k+1} \quad \text{und} \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{a_i}{a_{i-1}} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{4k+1}}{2} \quad \text{ist.}$$

Es hat sich also die größere von zwei Lösungen der Gleichung  $x^2 = x + k$  ergeben. Wird andererseits

$$x = \frac{a_i}{a_{i-1}} \approx \frac{a_{i+1}}{a_i}$$

genommen, so gilt

$$x^2 = \left( \frac{a_i}{a_{i-1}} \right)^2 \approx \frac{a_{i+1} a_i}{a_i a_{i-1}} = \frac{a_i + k a_{i-1}}{a_{i-1}} = x + k \quad (\text{vgl. Euler S. 58}).$$

Daniel Bernoulli, ein Sohn von Johann I Bernoulli, forschte zur des Erscheinens seiner Arbeit "Observationes de seriebus recurrentibus", 1728, gedruckt 1732 [B 3; 85 - 100], in Petersburg. Etwa zur gleichen Zeit waren dort noch Nikolaus II Bernoulli und Leonhard Euler (1707 - 1783).

Das Näherungsverfahren, welches vorgestellt wird, beruht auf der allgemeinen, von Daniel Bernoulli nicht bewiesenen Regel über Potenzsummen: Wenn man eine Reihe reeller Größen hat, dann überwiegen die Potenzen der betragsmäßig größten unter ihnen die übrigen umso mehr, je höher die Potenz ist (Monotonieeigenschaft).

Seien zunächst  $p_i \in \mathbb{R}$  mit  $1 \leq i \leq k$  und  $\left| \frac{p_i}{p_1} \right| < 1$  für  $i \neq 1$  gegeben.

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^k p_i^m}{\sum_{i=1}^k p_i^{m-1}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(1 + \sum_{i=2}^k p_i^m p_1^{-m}) p_1}{1 + \sum_{i=2}^k p_i^{m-1} p_1^{1-m}} = p_1.$$

Sind die  $p_i$  Wurzeln einer algebraischen Gleichung, so hat man gezeigt, daß der Quotient der  $m$ -ten und der  $(m-1)$ -ten Potenzsumme sich mit wachsendem  $m$  der absolut größten unter den Wurzeln nähert. Nimmt man einen negativen Exponenten und bezeichnet mit  $p_1$  die absolut kleinste Wurzel, so ist der Limes des Quotienten die absolut kleinste Wurzel. Da man Potenzsummen als symmetrische Funktionen durch elementarsymmetrische Funktionen der Koeffizienten einer Gleichung berechnen kann, braucht man  $m$  nur groß genug zu wählen, um einen angenäherten Wert der absolut größten, oder absolut kleinsten Wurzel zu erhalten [W 5; 342]. Die elementarsymmetrischen Funktionen waren spätestens, wenn auch nicht unter diesem Namen, seit Viète bekannt [V 2; 158] (Viètescher Wurzelsatz). Und seit Newton kennt man auch Wege zur Ermittlung der Potenzsummen, die von späteren Mathematikern bewiesen und ausgebaut wurden [N 3; 517 ff].

Fourier schreibt dazu in seiner Analyse [F 1; 7] :

" Albert Girard , welcher in Holland schrieb, hat als erster die Sätze erkannt, welche die Summen der ganzen Potenzen der Wurzeln liefern <genau genommen nur die Summen der ersten vier Potenzen [G 3; Bl. F 2a]> . Newton gab diese Theoreme in seiner Arithmetica universalis und zeigte, welchen Gebrauch man davon machen kann, um den angenäherten Wert einer Wurzel zu finden. <Tatsächlich sagt Newton bei der Bestimmung einer oberen Wurzelgrenze, daß die 2m-te Wurzel aus der Summe aller 2m-ten Potenzen aller Wurzeln um einen Betrag übertrifft, welcher umso kleiner wird, je größer m genommen wird. Dafür hat Newton die Relationen zwischen den Potenzsummen und den Koeffizienten ohne Beweis angegeben [N 3; 192]>. Dies ist in gewisser Beziehung der Ursprung der Theorie der rekurrenten Reihen, welche Daniel Bernoulli aus anderen Prinzipien abgeleitet hat."

Das Problem war also , eine brauchbare Berechnungsmethode für Potenzsummen beliebig hoher Ordnung zu finden. Die Berechnungsmethode hat Daniel Bernoulli in den rekurrenten Folgen gesehen. Eine ausführliche Herleitung hat erst Euler verfaßt [E 6; Kap. 17] .

Jede rekurrente Folge ergibt sich aus der Entwicklung eines Bruches von der Form

$$(1) \quad R(z) = \frac{\sum_{i=0}^m a_i z^i}{1 - \sum_{i=1}^n b_i z^i} = \frac{\sum_{i=0}^m a_i z^i}{\prod_{i=1}^n (1 - p_i z)} = \frac{A}{(1 - p_1 z)} + \frac{B}{(1 - p_2 z)} + \dots + \frac{N}{(1 - p_n z)}$$

$a_i, b_i \in \mathbb{R}$ ,  $n, m \in \mathbb{N}$ ,  $n > m$ . Die  $p_i$  seien verschieden. Die Potenzreihenentwicklung ergibt:

$$\frac{A}{(1 - p_1 z)} = A + A p_1 z + A p_1^2 z^2 + \dots$$

$$\frac{B}{(1 - p_2 z)} = B + B p_2 z + B p_2^2 z^2 + \dots$$

...

$$\frac{N}{(1 - p_n z)} = N + N p_n z + N p_n^2 z^2 + \dots$$

$$(2) \quad R(z) = (A + B + \dots + N) + (A p_1 + B p_2 + \dots + N p_n) z + (A p_1^2 + B p_2^2 + \dots + N p_n^2) z^2 + \dots$$

Andererseits kann  $R(z)$  direkt als Potenzreihe dargestellt werden. Dann ist

$$(3) \quad R(z) = P_0 + P_1 z + P_2 z^2 + \dots$$

Aus (1) und (3) folgt :

$$\sum_{i=0}^m a_i z^i = (P_0 + P_1 z + \dots)(1 - b_1 z - b_2 z^2 - \dots - b_n z^n),$$

und daraus durch Koeffizientenvergleich (4) :

$$(4) \quad P_0 = a_0$$

$$P_1 = b_1 P_0 + a_1$$

$$P_2 = b_1 P_1 + b_2 P_0 + a_2$$

$$P_3 = b_1 P_2 + b_2 P_1 + b_3 P_0 + a_3$$

...

$$P_r = b_1 P_{r-1} + b_2 P_{r-2} + \dots + b_r P_0 + a_r$$

usw., wobei  $a_r = 0$  für  $r > m$  und  $b_r = 0$  für  $r > n$  ist. Der Koeffizientenvergleich von (2) und (3) ergibt (5) :

$$(5) \quad P_0 = A + B + C + \dots + N$$

$$P_1 = A p_1 + B p_2 + \dots + N p_n$$

$$P_2 = A p_1^2 + B p_2^2 + \dots + N p_n^2$$

$$P_3 = A p_1^3 + B p_2^3 + \dots + N p_n^3$$

...

$$P_r = A p_1^r + B p_2^r + \dots + N p_n^r \quad \text{usw.}$$

Man kann daraus folgendes schließen :

1. Die  $P_\nu$ ,  $0 \leq \nu < \infty$ , sind gerade die gewichteten Potenzsummen der  $p_i$ .

Dabei gilt für  $\nu \rightarrow \infty$  und falls (o.E.)  $p_1$  der absolut größte Wert unter den  $p_i$  ist :

$$P \longrightarrow A p_1^\nu.$$

2. Wie die  $P_\nu$  entstehen, geht aus (4) hervor.

3. Da die  $a_i$  des Zählerpolynoms von  $R(z)$  beliebig waren, kann man auch die ersten  $m$  Potenzsummen  $P_\nu$  beliebig ansetzen. Sie enthalten ja die  $m$  Koeffizienten  $a_i$  als additive Konstante. Euler hat aber bereits ein Beispiel vorgeführt [E 4; § 346], wo die beliebig gewählten Anfangsglieder nicht zum Erfolg führten. Tatsächlich muß man fordern, daß der Zähler von  $R(z)$  nicht von gleicher Ordnung verschwindet, wie der Nenner. Es könnte sonst vorkommen, daß die Nullstelle des Zählers keine Polstelle des Bruches  $R(z)$  ergibt. Die sucht man aber, wenn man die Nullstellen des Nenners ( $=: f(z)$ ) angeben möchte.

4. Die Gewichtungen  $A, B, \dots, N$  enthalten zwar ebenfalls die  $a_i$ , ihr Wert wirkt sich aber, wie gleich gezeigt wird, beim Näherungsverfahren Bernoullis nur unwesentlich aus.

Ist  $(1 - p_1 z)$  ein Linearfaktor des Nennerpolynoms  $1 - \sum_{i=1}^n b_i z^i = f(z)$ , dann ist  $z = \frac{1}{p_1}$  eine Wurzel davon (Pol von  $R(z)$ ). Aus  $R(z)$  findet man aber  $\frac{1}{p_1}$ , wenn diese Wurzel reell und die absolut kleinste ist ( $p_1$  ist dann die absolut größte unter den  $p_i$ ), und wenn für hinreichend großes  $r$  der Quotient

$$\frac{P_r}{P_{r+1}} \approx \frac{A p_1^r}{A p_1^{r+1}} = p_1$$

gebildet wird. Will man hingegen die absolut größte Wurzel einer Gleichung, muß  $z = \frac{1}{x}$  substituiert werden.

Wenn man die Gleichung  $f(z) = 1 - \sum_{i=1}^n b_i z^i = 0$  zu lösen hat,

sind gemäß (4) der Reihe nach die  $P_r$  als Linearkombinationen der  $b_i$  aufzustellen und  $P_r P_{r+1}^{-1}$  zu berechnen. Die ersten  $n$   $P_v$ ,  $0 \leq v \leq n$ , sind (nahezu) beliebig anzusetzen. Als Beispiel sei die absolut kleinste Wurzel von

$$f(z) = 1 + 2z - 5z^2 + 4z^3 - z^4 = 0 \quad [B\ 3; 93] \text{ gesucht.}$$

Wähle  $P_0 = P_1 = P_2 = P_3 = 1 \implies$

$$P_4 = -2 + 5 - 4 + 1 = 0$$

$$P_5 = 0 + 5 - 4 + 1 = 2$$

$$P_6 = -4 + 0 - 4 + 1 = -7$$

$$P_7 = 14 + 10 + 0 + 1 = 25$$

$$P_8 = \quad \quad \quad = -93$$

$$P_9 = \quad \quad \quad = 341$$

$$P_{10} = \quad \quad \quad = -1254$$

$\frac{P_9}{P_{10}} = -\frac{341}{1254}$  in  $f(z)$  eingesetzt ergibt 0,000328, was für den geringen Rechenaufwand ein brauchbares Ergebnis ist.

Die vorgeführte Methode, das wußte Bernoulli bereits, ist nicht ohne weiteres anwendbar, wenn betragsgleiche Wurzeln auch noch die größten bzw.

die kleinsten Wurzeln sind. Diesen Mangel, in dem ja komplexe Nullstellen eingeschlossen sind, haben nach und nach spätere Bearbeiter dieser Methode behoben. Falls eine zweite Wurzel sehr eng bei der absolut kleinsten bzw. größten liegt, ist die Konvergenz überaus langsam, so daß das Bernoulli - Verfahren zunächst nur von theoretischer Bedeutung war. Erst als man erkannte, daß es "selbstkorrigierend" ist, d.h. ein einmal gemachter Fehler nur eine Änderung der Gewichtung der Potenzsummen bedeutet, und sich demzufolge an der Konvergenz "praktisch" nichts ändert, wurde man wieder darauf aufmerksam.

Auf die Vorgeschichte der Methode wurde bereits eingegangen. Daniel selbst stellt sein Verfahren so dar [B 3; 92]:

"12. Methodus nova inveniendi radices omnes cuiuscunque aequationis affectae tam numericae quam algebraicae .

Concilietur aequationi propositae haec forma

$$1 = a x + b x x + c x^3 + e x^4 + \text{etc.}$$

Dein formetur series incipienda a tot terminis arbitrariis, quot dimensiones aequatio habet, ea lege, ut si  $A, B, C, D, E, \text{etc.}$  denotend terminos se invicem directo ordine consequentes, sit ubique  $E = aD + bC + cB + eA + \text{etc.}$  sintque in hac serie satis continuata duo termini proximi  $M$  et  $N$ , erit terminus antecedens  $M$  divisus per consequentem  $N$  proxime aequalis radici quaesitae." (Die  $A, B, C, \dots$  bezeichnen hier die gewichteten Potenzsummen.)

In weiteren Kapiteln werden die Fälle diskutiert, in denen betragsgleiche Wurzeln auftreten. Dabei löst er das Problem zweier betragsgleicher kleinster reeller Wurzeln soweit, als er aus der Folge der  $P_r$  als Näherungswert nicht

$$\frac{P_r}{P_{r+1}}, \text{ sondern } \frac{P_r}{P_{r+2}}$$

nimmt. Tatsächlich strebt ja die Folge der Potenzsummen bei zwei minimalen Wurzeln  $p^{-1}$  und  $(-p)^{-1}$  gegen  $Ap^r + B(-p)^r$ .

$$\frac{Ap^r + B(-p)^r}{Ap^{r+2} + B(-p)^{r+2}} = \frac{p^r (b(-1)^r + A)}{p^{r+2} (B(-1)^{r+2} + A)} = \frac{1}{p^2}, \text{ da aber}$$

$B(-1)^r \neq B(-1)^{r-1}$  ist, können bei  $P_r P_{r+1}^{-1}$  die Gewichtungen nicht weggekürzt werden.

Durch den Übergang von  $1 = \sum_{i=1}^n b_i z^i$  nach  $x^i = \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^{n-1-i}$ ,

was ja einer Substitution  $z \rightarrow x^{-1}$  entspricht, konnte Bernoulli beide extremalen Wurzeln finden.

Ein erster Beweis dafür, daß  $P_r P_{r+1}^{-1}$  mit wachsendem  $r$  gegen eine extremale Wurzel geht, wurde erst von Gabriel Cramer (1704 – 1752) in einem Brief vom 26.12.1729 an James Stirling (1692 – 1770) gegeben [T 3; 115]. Cramer zeigt darin aber nicht, weshalb die  $P_r$  die gewichteten Potenzsummen der Wurzeln einer Gleichung sind. Dies, zusammen mit einer ausführlichen Herleitung, ist ein Verdienst Leonhard Eulers (1707 – 1783) [E 6; Kap 17]. Nach der Herleitung mit Hilfe von Partialbrüchen (s.S. 53 f.), geht Euler nun gerade auf die z.T. schon von Bernoulli erkannten Sonderfälle ein, in denen die Bernoullische Methode nicht ohne weiteres zu einem richtigen Ergebnis führt. So werden durch geeignete Substitutionen die Gleichungen mit engliegenden Wurzeln gelöst (§ 339), oder dadurch, daß bei reellen Wurzeln (§ 340) durch Nullpunktverschiebung andere Wurzeln zu solchen mit minimalem Betrag werden, sich von den ursprünglichen also nur um einen bekannten Summanden unterscheiden.

§ 345 begründet die Tatsache, daß bei der gebrochen rationalen Funktion  $R(z)$  Zähler und Nenner teilerfremd sein müssen. Hierzu schlägt Euler vor, den Zähler konstant 1 zu nehmen.

Besonders hervorzuheben ist die Untersuchung über das Auftreten komplexer Wurzeln (§ 348).

Enthält der Nenner von  $R(z)$  den Faktor  $(1 - 2p z \cos \varphi + p^2 z^2)$ , der

$$z_{1/2} = \frac{\cos \varphi \pm i \sin \varphi}{p}$$

zur Lösung hat, so ergibt sich für die  $r$ -te Potenzsumme der Ausdruck

$$P_r = \frac{A \sin(r+1)\varphi + B \sin r\varphi}{\sin \varphi} p^r + C p_3^r + \dots + N p_n^r.$$

Falls  $\frac{1}{p}$  der Betrag der beiden absolut minimalen Wurzeln ist, so zeigt sich, daß der Näherungsbruch

$$\frac{P_{r+1}}{P_r} = \frac{A \sin(r+2)\varphi + B \sin(r+1)\varphi}{A \sin(r+1)\varphi + B \sin r\varphi} p$$

alterniert und ungleich  $p$  bleibt. Verfolgt man aber die Entwicklung der Potenzsummen weiter bis  $P_{r+2}$  und  $P_{r+3}$ , kann aus den Näherungsbrüchen

$$\frac{P_{r+1}}{P_r}, \quad \frac{P_{r+2}}{P_{r+1}}, \quad \frac{P_{r+3}}{P_{r+2}}$$

A und B eliminiert werden; man erhält Bestimmungsgleichungen für  $p$  und  $\varphi$ . Es sei hier vermerkt, daß die komplexe Lösung nicht ausschließlich mit den rekurrenten Folgen gefunden wurde.

In Eulers "Vollständiger Anleitung zur Algebra" [E 5; 2. Teil, 1. Abs. Kap 16, § 231 ff] von 1771, steht eine Beschreibung der Näherung mit rekurrenten Folgen, unter Verzicht auf alle diese Folgen betreffenden Vorüberlegungen. Er beginnt mit der einfachen Forderung, eine Folge zu finden, die so beschaffen ist, "daß ein jedes Glied durch das vorhergehende dividiert, den Wert der Wurzel umso viel genauer anzeige, je weiter man diese Reihe < Folge > Zahlen fortsetzt."

Angenommen, man ist bereits zu den Gliedern  $a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, a_{i+3}$  gekommen, dann wird  $a_{i+1} a_i^{-1}$  die Wurzel  $x$  schon ziemlich genau angeben. Ein besserer Wert wird  $a_{i+2} a_{i+1}^{-1}$  sein, woraus folgt, daß

$$\frac{a_{i+2}}{a_i} \approx x^2, \quad \frac{a_{i+3}}{a_i} \approx x^3 \quad \text{und allgemein} \quad \frac{a_{i+n}}{a_i} \approx x^n \quad \text{ist.}$$

Sei  $x^2 = x + 1$  die gegebene Gleichung, und setzt man  $\frac{a_{i+2}}{a_i} = \frac{a_{i+1}}{a_i} + 1$

ein, so folgt:

$$a_{i+1} + a_i = a_{i+2}.$$

Damit hat man das Bildungsgesetz einer rekurrenten Folge hergeleitet. Falls für die beliebigen Ausgangswerte 0 und 1 gewählt wird, entsteht die Folge

$$0, 1, 1, \dots, 89, 144,$$

und folglich für  $x$  nacheinander

$$"x = \frac{1}{0}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \dots, \frac{144}{89}" \quad \text{wobei für } x = \frac{144}{89} \text{ der Fehler nur noch } \frac{1}{169} \text{ ist.}$$

Auch bei Gleichungen höheren Grades ergibt sich immer eine lineare Abhängigkeit der  $a_i$  und somit eine rekurrente Folge.

Euler weist auch darauf hin, daß diese Methode nicht zum Ziel führt, wenn man reine Gleichungen lösen möchte, also radiziert [E 6; II.1. Abs. Kap 16, § 253 f].

Dafür werden Beispiele genannt, deren Allgemeingültigkeit wir so sehen:

Soll  $x^n = N$  gelöst werden, so hat man als Bildungsgesetz für rekurrente Folgen

$$N = x^n \approx \frac{a_{i+n}}{a_i} \implies a_{i+n} = N a_i.$$

Die Wurzel  $x$  müßte näherungsweise  $\frac{a_{i+n}}{a_i}$  sein. Die Folge

$$a_{i-1}, a_{i-n+1}, \dots, a_i, \dots, a_{i+n}$$

kann dann, unter Berücksichtigung des Bildungsgesetzes, auch so geschrieben werden:  $a_{i-1}, a_{i-n+1}, \dots, a_{i-1}, N a_{i-n}, N a_{i-n+1}, \dots, N a_{i-1}, N(N a_{i-n})$ .

Daraus erkennt man, daß die Folge der Näherungsbrüche nicht konvergiert, weil sie nach  $n$  Schritten sich zu wiederholen beginnt:

$$\frac{a_{i-n+1}}{a_{i-n}}, \frac{a_{i-n+2}}{a_{i-n+1}}, \dots, \frac{N a_{i-n}}{a_{i-n}}, \dots, \frac{N(N a_{i-n})}{N a_{i-n}}.$$

Bereits früher schon [E 6; I, § 355] hat Euler  $\sin z = \frac{1}{2}$  dadurch gelöst, indem er die Potenzreihe für  $\sin z$  abgebrochen und die daraus resultierende endliche Gleichung mit Hilfe des Bernoulli - Verfahrens gelöst hat.

In ähnlicher Weise wie Euler greift Louis Joseph Lagrange ( 1736 - 1813 ) in seiner " Traité de la Résolution des Equations Numériques " [L 3; Note VI] von 1798 die Methode Bernoullis auf. Seine Herleitung der rekurrenten Folgen beruht auf der Entwicklung von  $\frac{f'(x)}{f(x)}$  in eine Potenzreihe, bzw. in Partialbrüche, wenn  $f(x) = 0$  die zu lösende Gleichung ist. Die  $x_i$  seien  $m$  verschiedene Wurzeln von

$$f(x) = \sum_{i=1}^m (x - x_i) \implies f'(x) = \sum_{i=1}^m \prod_{i=1}^m (x - x_i) \implies$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{x - x_i},$$

also etwas einfachere Partialbrüche als sie Euler erhielt. Wenn andererseits

$$\frac{f'(x)}{f(x)} =: R(x) = \frac{p_1}{x} + \frac{p_2}{x^2} + \frac{p_3}{x^3} - \dots$$

gilt, so gibt ein Koeffizientenvergleich von  $R(x)f(x)$  und  $f'(x)$  eine völlig analoge Aufstellung wie ( 4 ) und ( 5 ) (s.S. 54 ). Lediglich die Potenzsummen  $p_r$  sind ungewichtet.

Das Buch "Traité de la Résolution des Equation Numériques " verdient es besonders erwähnt zu werden, da es erstmals ein umfassendes Lehrbuch über eine Anzahl bislang bekannter Näherungsmethoden darstellt. Neben vielen historischen Daten enthält es wesentliche Zusätze zur Newton - Raphson - , Bernoulli - , Kettenbruch- und Differenzenmethode (s.S. 87 ) , sowie Untersuchungen über die Berechnung komplexer Wurzeln, deren Anzahl und Eingrenzungsmöglichkeiten.

Lagrange schickte ein Duplikat an Pietro Paoli mit der Bemerkung: " Es enthält meine alten Arbeiten über die Lösung numerischer Gleichungen, ... mit zahlreichen Bemerkungen über diese Arbeiten und andere Punkte in der Theorie der Gleichungen. Ich habe diesen Bemerkungen geschlossen Note I - XIV hinzugefügt, um die Aufmerksamkeit der Mathematiker auf diesen wichtigen Gegenstand der Analysis, den sie, wie es scheint, verlassen haben, zu lenken." [C 1; 213]

Moritz Stern ( 1807 - 1894 ) gelang schließlich ein entscheidender Fortschritt in der Methode der rekurrenten Folgen. Seine Arbeit über diesen Gegenstand ist ein Kapitel in der " Theorie der Kettenbrüche und ihre Anwendung " [S 10; VA, §§99-103] . Sie beginnt mit einem geschichtlichen Überblick, in dem Stern kritisch zu den Leistungen seiner Vorgänger Stellung nimmt. Insbesondere schreibt er : " Der erste, welchem man eine wahrhafte Fortbildung der Bernoullischen Methode verdankt, ist Fourier." Fouriers Arbeit ist nicht mehr im Druck erschienen, sondern es blieb bei einem "Exposé synoptique"[F 1;66-69] und den zwei ersten Büchern und Andeutungen über sieben geplante Bücher. Die vollständigen Bücher befassen sich mit der Zeichenregel und der Newtonschen Näherungsmethode. Fouriers Gedanke, den Rechenweg mit rekurrenten Folgen betreffend, der uns durch Stern übermittelt und ausgebaut wird, ist folgender :

Falls  $|x_1| \gg |x_2| \gg |x_3| \gg \dots \gg |x_m|$  die Beträge aller Wurzeln eines Polynoms sind, kann man aus diesem rekurrente Folgen bilden, welche Potenzsummen für Wurzelprodukte ergeben. Daraus lassen sich dann

$$x_1, x_1x_2, x_1x_2x_3, \dots, x_1x_2 \dots x_m$$

approximieren.

Ist nun  $x_1 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ , d.h. ein Paar konjugiert komplexer Wurzeln  $x_1$  und  $x_2$  sind die absolut größten, so kann man zwar nicht  $x_1$ , wohl aber  $x_1 x_2$  mit rekurrenten Folgen berechnen. Sind noch weitere  $x_i$  komplex, so muß u.U.  $x_1 x_2 \dots x_{i+1}$  bestimmt werden. Um nun die realen bzw. die imaginären Anteile der Wurzeln zu erhalten, benötigt man noch weitere Folgen, die nicht die Wurzelprodukte, sondern Wurzelsummen zu finden gestattet.

Sterns Methode die Summenreihen und die Produktreihen zu finden ist " was die leitende Idee und die einzelnen Resulte betrifft, durchaus mit der Fourierschen identisch " [S 10; 160] .

Es sei die Gleichung  $x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \dots + a_m = 0$  vorgelegt, mit den zunächst reell und verschieden im Betrag angenommenen Wurzeln

$$x_1 > x_2 > x_3 > \dots > x_m .$$

Man weiß aus dem Zusammenhang zwischen Potenzsummen und Koeffizienten, daß gilt:

$$\begin{aligned} (1) \quad \sum_{i=1}^m x_i &= -a_1 \\ \sum_{j>i}^m x_i x_j &= a_2 \\ \sum_{k>j>i}^m x_i x_j x_k &= -a_3, \quad \text{usw.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \sum_{i=1}^m x_i^2 &= a_1^2 - 2a_2 = -a_1 \sum_{i=1}^m x_i - 2a_2 \\ \sum_{i=1}^m x_i^3 &= -a_1^3 - 3a_1 a_2 - 3a_3 = -a_1 \sum_{i=1}^m x_i^2 - a_2 \sum_{i=1}^m x_i - 3a_3 \end{aligned}$$

usw. . Mit (1) und (2) folgt

$$2 \cdot \sum_{j>i}^m x_i x_j = 2a_2 = \left( \sum_{i=1}^m x_i \right)^2 - \sum_{i=1}^m x_i^2 .$$

Substituiert man  $x_i^r$  für  $x_i$ , hat man

$$2 \cdot \sum_{j>i}^m (x_i x_j)^r = \left( \sum_{i=1}^m x_i^r \right)^2 - \sum_{i=1}^m x_i^{2r} =: C(r) ,$$

wobei diese Differenz aus den bekannten Potenzsummen der Wurzeln berechnet werden kann. Läßt man  $r$  wachsen und dividiert zwei aufeinanderfolgende Terme, unter Berücksichtigung, daß ja

$$\sum_{i=1}^m (x_i x_1)^r \text{ gegen } (x_1 x_2)^r \text{ strebt,}$$

so kommt heraus

$$\frac{\left(\sum_{i=1}^m x_i^{r+1}\right)^2 - \sum_{i=1}^m x_i^{2r+2}}{\left(\sum_{i=1}^m x_i^r\right)^2 - \sum_{i=1}^m x_i^{2r}} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} x_1 x_2.$$

Zähler und Nenner können aus den Koeffizienten der Gleichung ohne weiteres gefunden werden. Ist  $x_1$  bereits gefunden, so kann auch  $x_2$  berechnet werden. Wäre aber  $x_1 \in \mathbb{R}$  und  $x_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ , so läßt sich keine Konvergenzaussage machen, sondern erst wieder, wenn  $x_1 x_2 x_3$ , das im Prinzip wie oben hergeleitet wird, vorliegt.  $x_2$  und  $x_3$  müssen ja konjugiert komplex sein, und damit ist ihr Produkt aus  $\mathbb{R}$ . Stern zeigt noch wie allgemein das Wurzelprodukt  $x_1 x_2 \dots x_n$  aus den obigen Überlegungen hervorgeht. (Offensichtlich unbeachtet blieb eine Veröffentlichung darüber von Edward Waring aus dem Jahre 1770 [W 2; 13]) Es ergeben sich nach und nach alle reellen und die Beträge der komplexen Wurzeln.

Um Realteil  $u$  und Imaginärteil  $v$  der komplexen Wurzeln zu erhalten, bedarf es noch weiterer Reihen, die zusätzlich Aussagen über die Summen der Wurzeln bringen. Allgemein lassen sich durch rekurrente Folgen Ausdrücke der Form

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) \prod_{i=1}^n x_i, \quad n \leq m,$$

wie Stern zeigt, gewinnen. Das Prinzip erkennt man bereits im Falle  $n = 2$ .

$$\begin{aligned} \text{Für } r \in \mathbb{N} \text{ gilt: } \sum_{i>j} (x_i + x_j) x_i^r x_j^r &= \sum_{i>j} x_i^{r+1} x_j^r + \sum_{i>j} x_i^r x_j^{r+1} = \\ &= \sum_{i=1}^m x_i^{r+1} \sum_{i=1}^m x_i^r - \sum_{i=1}^m x_i^{2r+1} =: D(r) \end{aligned}$$

Bei  $D(r)$  stehen nur Potenzsummen, die man unmittelbar aus den Koeffizienten der zu lösenden Gleichung bekommt. Bildet man die Folge der  $D(r)$ , so strebt, falls  $x_1$  und  $x_2$  absolut größer als alle übrigen Wurzeln sind,

$$\sum_{i>j} (x_i + x_j) x_i^r x_j^r$$

für wachsendes  $r$  gegen  $(x_1 + x_2) x_1^r x_2^r$ . Der Quotient zweier aufeinanderfolgender Glieder der Folge der  $D(r)$  approximiert somit  $(x_1 + x_2) x_1 x_2$ .

Wären  $x_1$  und  $x_2$  konjugiert komplexe Wurzeln, deren Betrag größer als der aller übrigen Wurzeln ist, so bleibt  $(x_1 + x_2) x_1 x_2$  trotzdem reell. Gilt aber  $x_1 \in \mathbb{R}$  und  $x_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ , so ist obiger Ausdruck nicht zu approximieren, wohl aber  $(x_1 + x_2 + x_3) x_1 x_2 x_3$ . Denn  $x_2$  und  $x_3$  sind notwendig konjugiert komplex, und somit ist dieses neue Produkt wieder reell.

Aus den Näherungswerten der Folgen  $C(r)$  und  $D(r)$  erhält man durch Division die Summe zweier konjugiert komplexer Wurzeln mit bereits bekannten, betragsmäßig größeren Wurzeln und das Produkt der konjugierten mit schon gefundenen Wurzeln. Also :

$$\frac{D(r)}{C(r)} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} x_1 + x_2 + \dots + x_i + x_{i+1} =: a$$

$$C(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} x_1 x_2 \dots x_i x_{i+1} =: b, \quad 1 \leq i \leq m-1, \quad x_v \text{ bekannt für } v \leq i-1.$$

Ist  $x_i$  und  $x_{i+1}$  ein Paar konjugiert komplexer Wurzeln, so bekommt man

$$2u = x_i + x_{i+1} = -(x_1 + x_2 + \dots + x_{i-1}) + a$$

$$u^2 + v^2 = x_i x_{i+1} = \frac{b}{x_1 x_2 \dots x_{i-1}} \quad \text{und letztlich } u \text{ und } v.$$

Das hier angedeutete Verfahren ist allerdings so aufwendig, daß es sehr bald in Vergessenheit geraten ist, zumal eine elegantere Lösung von Carl Gustav Jakob Jacobi (1804 - 1851) in Crelles Journal Bd 13 von 1835 veröffentlicht worden ist : "Observationculae at Theoreman aequationum algebraicarum pertinentes" [J 1]. Merkwürdigerweise sind die Arbeiten von Stern und Jacobi fast unmittelbar hintereinander in Crelles Journal erschienen, ohne daß Jacobi die Arbeit Sterns erwähnt, sondern direkt bezug auf Fouriers Exposé nimmt.

Nehmen wir an, es seien die Beträge der Wurzeln  $x_1, x_2, \dots, x_n$  einer Gleichung  $n$ -ten Grades so geordnet :

$$|x_i| > |x_j| \text{ mit } 1 \leq i \leq k \leq j \leq n.$$

Wir setzen

$$P_r = \sum_{i=1}^k x_i^r \quad (\text{Potenzsummen})$$

$$\text{und} \quad \prod_{i=1}^k (x - x_i) = x^k + \sum_{i=1}^k A_i x^{k-i} \quad (\text{Gleichung der } k \text{ größten Wurzeln})$$

Dann genügen die  $A_i$ , entsprechend den  $b_i$  auf Seite 54, den Gleichungen

$$(1) \quad P_{m+k} + \sum_{i=0}^{k-1} P_{m+i} A_{k-i} = 0 \quad \text{bis}$$

$$P_{m+k+(k-1)} + \sum_{i=0}^{k-1} P_{m+k+i-1} A_{k-1} = 0$$

Nimmt man noch die Gleichung

$$(2) \quad x^k + \sum_{i=1}^k A_i x^{k-i} = 0$$

hinzu, so kann man aus den  $k+1$  Gleichungen (1) und (2) die  $A_v$  eliminieren und erhält dabei ein Polynom  $k$ -ten Grades, mit den Koeffizienten in  $P_r$  und mit den Wurzeln  $x_1, x_2, \dots, x_k$ . Man kann diese Gleichung in Form einer Determinante schreiben, da es sich bei (1) und (2) um ein lineares Gleichungssystem für die  $A_v$  handelt (vgl. z. B. [W 5; § 25 f]).

Die Potenzsummen  $P_r$  können bei hinreichend großem  $r$  durch die Potenzsummen aller Wurzeln ersetzt werden. Jacobi rechnet dann die Fälle  $k=2$  und  $k=3$  durch [J 1; 282 f].  $k=2$  bedeutet:

$$P_m = x_1^m + x_2^m, \quad P_{m+1} = x_1^{m+1} + x_2^{m+1}, \quad P_{m+2} = x_1^{m+2} + x_2^{m+2} \quad \text{und}$$

$$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 + A_1 x + A_2 = 0.$$

Die Elimination der  $A_v$  ergibt die Determinante

$$\begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ P_{m+2} & P_{m+1} & P_m \\ P_{m+3} & P_{m+2} & P_{m+1} \end{vmatrix} = 0,$$

diese entwickelt nach der ersten Zeile läßt die Gleichung

$$x^2 + \frac{P_m P_{m+3} - P_{m+1} P_{m+2}}{P_{m+1}^2 - P_m P_{m+2}} \cdot x + \frac{P_{m+2}^2 - P_{m+1} P_{m+3}}{P_{m+1}^2 - P_m P_{m+2}} = 0$$

entstehen. Die  $A_v$  sind näherungsweise bekannt, weil das gleiche für die  $P_m, P_{m+1}, \dots$  gilt. Darüber, wie sich Ungenauigkeiten auswirken, wird keine Angabe gemacht.

Eine weitere Formel wurde von Franz Meyer entwickelt, welche bereits eine Separierung der Wurzeln voraussetzt. Danach geht aber der große Vorteil des

Bernoulli - Verfahrens, nämlich ohne anderswie gefundene Näherungswerte auszukommen, verloren [M 3].

Das Bernoulli - Verfahren konnte sich in der Praxis erst im 20. Jh. noch einmal in die Reihe der praktikablen Näherungsverfahren einführen, nachdem eine Anzahl von Verbesserungen entdeckt wurden. Ein historisches Beispiel, wo in der Praxis des 18. oder 19. Jh. mit "Bernoulli" gerechnet wurde, konnte nicht gefunden werden. Die Gründe, weshalb man das Verfahren nicht anwandte, liegen wahrscheinlich in der Fülle von Separationsverfahren (Zeichenregel, Differenzenmethode, Satz von Rolle u.a. (s. Kap. VIII)) für alle Wurzeln, in deren Folge man bequem die regula falsi oder das Newton - Raphson - Verfahren durchführen konnte. Seit der ersten Hälfte des 19. Jh. war aber vor allem das Gräffe - Verfahren eingeführt. Das Rechnen nach Gräffe ist weniger aufwendig, als das nach Bernoulli, zumal es quadratisch konvergiert, und deshalb weniger Rechenschritte erfordert. Beim Verfahren von Bernoulli hat man nur lineare Konvergenz, d.h. das Verhältnis zweier Fehler (Bez. s.S. 53 ff)

$$\frac{P_{r+2} P_{r+1}^{-1} - p_1}{P_{r+1} P_r^{-1} - p_1} \text{ strebt gegen } p_2 p_1^{-1} \quad [S 13; 94 f],$$

woraus man erkennt, daß die Konvergenz besonders langsam bei engliegenden Wurzeln  $p_1$  und  $p_2$  ist.

Im 20. Jh. wurden mit den Fortschritten der Rechenautomaten halbvergessene Verfahren auf der Suche nach "maschinengerechten" Algorithmen erneut durchforscht. Hierbei hat sich das Bernoulli - Verfahren als geeignet erwiesen, weshalb zum Abschluß dieses Kapitels noch zwei Weiterführungen erwähnt seien. Da ist einmal der Quotienten-Differenzen-Algorithmus von Rutishauser [R 6], der auf der Berechnung von  $P_r P_{r-1}^{-1}$  und parallel dazu  $P_{r+1} - P_r$  beruht (vgl. [S 13; 95-100]), und zum anderen eine Variante von Bauer aus dem Jahre 1954 [B 1]. Das Ziel Bauers war es, die Bernoulli - Jacobische Variation abzukürzen und zugleich quadratische Konvergenz zu erreichen. Dazu dient im wesentlichen eine günstige Wahl des Zählerpolynoms von  $R(z)$  (vgl. S.53) und dessen Nutzung, die ja bei den genannten Abwandlungen unterblieb.

## 2. Gräffe - Methode der quadrierten Wurzeln

Die Methode Bernoullis hatte gegenüber der von Newton den Vorteil, daß kein Näherungswert vor Beginn des eigentlichen Verfahrens bekannt sein mußte; beide sind gleich umständlich zu handhaben, wenn komplexe Nullstellen auftreten. Zudem kann man immer nur einen Nullstellenwert bei einem vollständigen Rechengang finden. Diese Nachteile behebt die bis heute in modernen Lehrbüchern für numerisches Rechnen behandelte, und vor der allmählichen Verdrängung durch Elektronenrechner, für Polynomgleichungen vorwiegend benutzte Methode der "quadrierten Wurzeln".

Sie gründet sich auf denselben Hauptgedanken wie die Methode von Bernoulli, nämlich, daß die Potenzsummen der Wurzeln bei zunehmender Potenz, mehr und mehr vom Summanden der absolut größten Wurzel überragt werden. Bernoulli findet  $x_1$ , wenn dies die absolut größte unter den Wurzeln  $x_i$  eines Polynoms ist, durch

$$\lim_{r \rightarrow \infty} P_{r+1} P_r^{-1} = x_1, ,$$

mit quadrierten Wurzeln kommt man aber zu

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt[r]{P_r} = x_1 .$$

Offensichtlich ohne voneinander zu wissen, haben 1826 Germain Pierre Dandelin ( 1794 - 1847 ) in Brüssel [D 1], 1834 Nikolai Iwanowitsch Lobatschewskij ( 1799 - 1856 ) in Kasan [L 6; § 257] und erst 1837 Carl Heinrich Gräffe ( 1799 - 1837 ), ein Züricher Mathematiker, der mit seiner Abhandlung eine Preisfrage der Königl. Akademie der Wissenschaften von Berlin gewonnen hat, die heute vornehmlich nach Gräffe benannte Methode publiziert [G 5]. Transformationen, welche quadrierte Wurzeln erzeugen, sind schon 1763 durch Edward Waring bekannt gemacht worden [Philosophical Transactions Nr. 53, London 1763] und später 1776 [W 3; 311]; allerdings bestand nicht die Absicht Wurzeln zu approximieren.

Dem Verfahren geht die Überlegung voraus, zu einem gegebenen Polynom  $f(x)$  ein  $f_1(x^2)$  zu finden, dessen Nullstellen die möglicherweise negativen Quadrate derjenigen von  $f(x)$  sind. Aus

$$f_1(x^2) \text{ wird } f_2(x^4), \text{ und allgemein wird aus } f_r(x^{2^r}) \text{ ein } f_{r+1}(x^{2^{r+1}})$$

gebildet, und jedesmal sind die Wurzeln von  $f_{r+1}$  die ( ev. negativen ) Quadrate derjenigen von  $f_r$ . Man erreicht damit ein weites Auseinanderziehen der Wurzeln, was zur Folge hat, daß die Summe aller Wurzelpotenzen rascher mit

der Potenz der absolut größten Wurzel gleichgesetzt werden kann. Die benötigten Gleichungen  $f_r(x^{2^r}) = 0$  sind auf verschiedene Weisen zu bekommen.

Man kann so vorgehen (vgl. auch [Z 1; § 3]):

$$\text{Sei } f(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i), \text{ dann ist } f(-x) = \prod_{i=1}^n (-x - x_i).$$

Daraus findet man  $f(x)f(-x) = (-1)^n \prod_{i=1}^n (x^2 - x_i^2)$ , deren Wurzeln die (ev. neg.) Quadrate derjenigen von  $f(x)$  sind. Es gilt aber auch

$$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^{n-i} \quad \text{und} \quad f(-x) = \sum_{i=0}^n a_i (-1)^{n-i} x^{n-i}, \quad a_0 = 1.$$

Die Koeffizienten  $a_i$  von  $f_1(x^2)$  ergeben sich aus der Multiplikation von  $f(x)$  mit  $f(-x)$ , und unter Berücksichtigung, daß ja die ungeraden Potenzen wegfallen:

$$f(x)f(-x) =: f_1(x^2) = \sum_{i,j=0}^n (-1)^{n-i-j} a_i a_j x^{2n-2i-2j} = \sum_{v=0}^{2n} x^v \sum_{(i+j=v)} (-1)^i a_i a_{v-i} \quad (+).$$

Für ungerades  $v$  wird  $(+)$  gleich Null, denn in  $f(-x)$  treten genau bei den ungeraden Potenzen die zugehörigen Koeffizienten mit negativem Vorzeichen auf; in  $f(x)$  haben alle  $a_i$  positives Vorzeichen. Da alle Produkte, abgesehen vom Vorzeichen, doppelt vorkommen, müssen diejenigen, zu denen eine ungerade Potenz gehört ( $v$ ), einmal positiv und einmal negativ auftreten und somit herausfallen. Da in  $f_1(x^2)$  nur gerade Potenzen vorkommen, hat  $f_1(x^2)$  den gleichen Grad wie  $f(x)$ . Die Konstruktion der Koeffizienten von  $f_1(x^2)$  läßt sich in einem Schema ("Gräffe - Schema") darstellen.

Es werde zunächst der einfachste Fall reeller, betragsmäßig verschiedener Wurzeln betrachtet:

$$|x_1| > |x_2| > |x_3| > \dots > |x_n|.$$

$f(x)$  sei bereits in  $f_r(x^{2^r}) =: f_r(z)$  verwandelt und sehe so aus:

$$f_r(z) = z^n + A_1 z^{n-1} + \dots + A_{n-1} z + A_n.$$

Aus den elementarsymmetrischen Funktionen weiß man:

$$-A_1 = z_1 + z_2 + \dots + z_n$$

$$A_2 = z_1 z_2 + z_1 z_3 + \dots + z_{n-1} z_n$$

$$-A_3 = z_1 z_2 z_3 + z_1 z_2 z_4 + \dots + z_{n-2} z_{n-1} z_n \dots (-1)^n A_n = z_1 z_2 z_3 \dots z_n.$$

Mit hinreichend großem  $r$ , was von der gegenseitigen Lage der Wurzeln abhängig ist, und unter Vernachlässigung des Vorzeichens, kann angenähert gelten:

$$\left. \begin{array}{l} A_1 = z_1 \\ A_2 = z_1 z_2 \\ \dots \\ A_n = z_1 z_2 \dots z_n \end{array} \right\} \begin{array}{l} z_2 = \frac{A_2}{A_1} \\ z_3 = \frac{A_3}{A_2} \\ \dots \\ z_n = \frac{A_n}{A_{n-1}} \end{array} \Rightarrow x_1 = \sqrt[r]{\frac{A_i}{A_{i-1}}}.$$

Das Vorzeichen der Wurzel findet man in der Praxis durch probeweises Einsetzen in  $f(x)$ .

Für  $n = 3$  und den gesuchten Wurzeln  $x_1 = 1,003$ ,  $x_2 = 1,002$  und  $x_3 = 1,001$  muß  $r = 10$  sein, damit der Fehler kleiner als die Differenzen der Wurzeln wird.

$$A_1 = 32,0051 \Rightarrow x_1 \approx \sqrt[10]{\frac{A_1}{A_1}} \approx 1,0039... \quad \text{Fehler } F < 4 \cdot 10^{-4}$$

$$A_2 = 247,538 \Rightarrow x_2 \approx \sqrt[10]{\frac{A_2}{A_1}} \approx 1,00199... \quad F < 10^{-4}$$

$$A_3 = 36,53999 \Rightarrow x_3 \approx \sqrt[10]{\frac{A_3}{A_2}} \approx 1,00061... \quad F < 4 \cdot 10^{-4}$$

Bereits bei einem Unterschied der Wurzeln von ungefähr 1 genügt  $r = 3$ , um eine ähnlich gute Näherung zu erzielen.

Seien  $x_1 = 2,8$ ,  $x_2 = 1,4$ ,  $x_3 = 0,4$ .

$$A_1 = 3792,778 \Rightarrow x_1 \approx \sqrt[3]{\frac{A_1}{A_1}} \approx 2,8000026... \quad F < 10^{-6}$$

$$A_2 = 55756,12 \Rightarrow x_2 \approx \sqrt[3]{\frac{A_2}{A_1}} \approx 1,3993194... \quad F < 7 \cdot 10^{-4}$$

$$A_3 = 36,53999 \Rightarrow x_3 \approx \sqrt[3]{\frac{A_3}{A_2}} \approx 0,3999952... \quad F < 5 \cdot 10^{-6}.$$

Es wurden jetzt alle betragsmäßig verschiedenen Nullstellen gefunden; was geschieht aber bei mehreren betragsgleichen Wurzeln? Dazu soll auf die historischen Beispiele näher eingegangen werden.

Dandelins Arbeit "Recherches sur la résolution des équations numériques", in der im zweiten Anhang die beschriebene Methode erstmals vorgestellt wurde, fand allerdings kaum Beachtung, obwohl es in der Schriftenreihe der Brüsseler Akademie erschienen ist.

Die Form  $f_1(x^2) = f(x)f(-x)$ , wird so erhalten:

Man spalte  $f(x)$  in  $g(x) + h(x)$  auf, wobei  $g$  die geraden und  $h$  die ungeraden Potenzen von  $x$  enthält. Dann ist  $g(-x) = g(x)$ ,  $h(-x) = -h(x)$ , also

$$f(x)f(-x) = (g(x) + h(x))(g(x) - h(x)) = g^2(x) - h^2(x).$$

Die Wurzeln schreibt Dandelin in der Form  $\varphi(\cos \theta + \sin \theta \sqrt{-1})$ , behandelt also gleich den allgemeinsten Fall. Zur Berechnung geht er von folgender Überlegung aus:

Wenn eine Gleichung  $f(x) = 0$   $m+n$  Wurzeln besitzt, und die Beträge der ersten  $m$  Wurzeln sehr groß, verglichen mit denen der letzten  $n$  sind, dann gehören die ersten  $m$  Wurzeln zu einer Gleichung

$$\varphi(x) = x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_{m+1},$$

und die  $n$  kleinen Wurzeln genügen einer Gleichung

$$\psi(x) = a_{m+1} x^n + a_{m+2} x^{m-1} + \dots + a_{m+n}.$$

Es gilt dabei  $f(x) = x^{m+n} + \sum_{i=1}^{m+n} a_i x^{m+n-i} = x^n \varphi(x) - a_{m+1} x^n + \psi(x).$

Dies ist so zu verstehen:

Falls genügend Wurzelquadrierungen durchgeführt sind, sieht man, daß, sagen wir  $n$  Wurzeln gegenüber den  $m$  anderen praktisch Null gesetzt werden können. Das heißt aber, daß gemäß den elementarsymmetrischen Funktionen entsprechend viele Koeffizienten, nämlich die letzten  $n$  von  $f(x)$ , ebenfalls vernachlässigt werden können. Es bleibt  $x^n \varphi(x)$ . Geht man von  $x$  nach  $x^{-1}$  über, ergibt sich eine analoge Aussage für  $\psi(x)$ . Wird nun  $\varphi(x)$  und  $\psi(x)$  weiter aufgeteilt, kommt man schließlich zu linearen, bzw. quadratischen Gleichungen wegen der mög-

lichen komplexen Wurzeln. Die linearen Gleichungen können dabei auch nur linear in einer Potenz einer reellen Mehrfachwurzel sein.

Die gesuchte Wurzel erhielte man, falls das Quadrieren bis zu  $f_r(x^{2^r})$  fortgeschritten ist, als  $2r$ -te Wurzel von  $x^{2^r}$  aus den Linear- bzw. Quadrategleichungen. Um dies zu vermeiden, weil bei komplexen Zahlen hier  $2^r$  verschiedene Werte möglich sind, schlägt Dandelin vor, zu  $f_r(x^{2^r})$  noch  $\bar{f}_r(x^{2^r+1})$  zu bilden, beschreibt aber nicht, wie dies praxisgerecht geschehen soll. Aus einem quadratischen Teilpolynom von  $f_r$  und dem entsprechenden aus  $\bar{f}_r$  ergibt sich für die gesuchte Wurzel  $x$  näherungsweise:

$$f_r : a(x^{2^r})^2 + b(x^{2^r}) + c = 0 \quad \text{und}$$

$$\bar{f}_r : \bar{a}(x^{2^r+1})^2 + \bar{b}(x^{2^r+1}) + \bar{c} = 0,$$

von denen beide zusammen vier verschiedene Zahlen liefern können, die den Gleichungen genügen. Die zwei Zahlen, welche  $f(x) = 0$  erfüllen, findet man durch eine Probe. Leider ist der Gedankengang nicht überall durchgeführt, und es fehlen einschlägige Beispiele.

So wie Lobatschewskij die Methode abhandelt, bringt sie auch noch nicht den gewünschten Erfolg bezüglich betragsgleicher Wurzeln. Das Vorgehen für einfache reelle Wurzeln stimmt weitgehend mit der allgemeinen Beschreibung des Verfahrens am Anfang des Kapitels überein.

Bekannt gemacht hat die Methode der quadrierten Wurzeln erst richtig Gräffe. Seine Arbeit beschäftigt sich mit einem Eliminationsverfahren, bei dem Real- und Imaginärteil einer komplexen Wurzel durch gesondert zu bestimmende Gleichungen gefunden werden, dann mit der Lagrangeschen Kettenbruchmethode und schließlich mit dem Bernoulli - Verfahren. Diese Lösungswege betrachtet er alle unter dem Gesichtspunkt "unmöglicher", d.h. komplexer Wurzeln und des nötigen Arbeitsaufwandes. Erst dann erklärt er seine Methode.

Dies geschieht im Prinzip wie eingangs, aber unter anschließender Hinzunahme von Logarithmen. Gegeben sei

$$f(x) = x^n + \sum_{i=1}^{n-1} b_i x^{n-i}$$

Ist das Quadrieren weit genug fortgeschritten, so gilt für die neuen Koeffizienten  $a_i$  und die nach abnehmenden Betrag geordneten Wurzeln  $x_i$

$$\log a_1 \approx \log x_1^{2^r}$$

$$\log a_2 \approx \log (x_1 x_2)^{2^r}$$

$$\dots$$

$$\log a_n \approx \log (x_1 x_2 \dots x_n)^{2^r}.$$

Man hat dann

$$\log x_1 \approx \frac{\log a_1}{2^r}, \quad \log x_2 \approx \frac{\log a_2}{2^r}, \quad \text{usw. .}$$

Schreibt man abkürzend gleich Logarithmen anstatt der Koeffizienten, so erkennt man leicht, ob schon hinreichend oft quadriert wurde daran, daß sich die Logarithmen bei jeder Wurzelquadratur praktisch nur noch verdoppeln.

Komplexe Wurzeln berechnet Gräffe so: Sind zwei Wurzeln betragsgleich, und betrachtet man den allgemeinen Fall, daß sie konjugiert komplex sind, so treten sie beim linearen Glied von  $f(x)$ , dessen Koeffizient gleich der Summe der Wurzeln ist, nur mit dem Realteil

$$\varrho^{2^r} \cos 2^r \psi \quad \text{des Paares} \quad \varrho^{2^r} (\cos 2^r \psi \pm i \sin 2^r \psi)$$

auf. In den übrigen Koeffizienten, in denen Produkte der Wurzeln stehen, treten sie u. a. als Quadrat des Betrages  $\varrho$  auf. Hierzu ein vollständiges Beispiel von Gräffe [G 5; 22 f].

" Berechnen wir ferner nach derselben Methode die Wurzeln der Gleichung

$$\langle f(x) = \rangle x^5 + x^4 + x^3 - 2x^2 + 2x - 1 = 0$$

welche auch Stern  $\langle [S 10] \rangle$  nach seiner Methode, aber nicht mit hinreichender Annäherung gelöst hat, so erhalten wir bei den Quadrierungen nach und nach

$$2\text{-te Potenz: } x^5 + x^4 + 9x^3 + 2x^2 - 1$$

$$4\text{-te " : } x^5 + 17x^4 + 77x^3 - 2x^2 + 4x - 1$$

$$8\text{-te " : } x^5 - 135x^4 + 6005x^3 + 646x^2 + 12x - 1$$

$$16\text{-te " : } x^5 - 6215x^4 + 36234469x^3 + 273466x^2 + 1436x - 1$$

In den folgenden Ausdrücken stehen statt der Koeffizienten deren Logarithmen:

<Es handelt sich hierbei um keine Transformation, sondern lediglich um eine abkürzende Schreibweise>

32-te Potenz:  $x^5 + 7,5294653x^4 + 15,1182428x^3 + 10,4665969x^2 + 6,1804397x$

64-te " :  $+ 21,4943216x^2 + 12,3718592x$

128-te " :  $24,7442072x$

Da hier schon der zweite Koeffizient bei der 32-ten Potenz quadratisch wächst, und der erste von einer Quadrierung zur anderen sein Zeichen wechselt, so sind die beiden größten Wurzeln unmöglich. Dasselbe gilt auch von den beiden nächsten Wurzeln, und die fünfte Wurzel endlich ist reell <Anm. 1>. Sind nun die Moduln der zwei Wurzelpaare  $\varrho_1$  und  $\varrho_2$ , so hat man aus dem obigen Teil :

$$\log \varrho_1^{64} = 15,1182428 \text{ und daher } \log \varrho_1 = 0,2362225$$

$$\log(\varrho_1 \varrho_2)^{256} = 24,7442072 \quad \log \varrho_2 = 0,8604346 - 1$$

$$\log(\varrho_1 \varrho_2 \alpha_5) = 0,0 \quad \log \alpha_5 = 0,8066858 - 1$$

Hieraus folgt zunächst  $\alpha_5 = 0,6407460$ , und da bei den Substitutionen von 0 und  $+1$  in die gegebene Gleichung entgegengesetzte Zeichen im Resultate erscheinen, so ist diese Wurzel positiv. Zu den beiden Werten von  $\varrho_1$  und  $\varrho_2$  findet man die gehörigen Winkel vermittelt der bekannten Beziehungen :

$$2 \varrho_1 \cos \varphi_1 + 2 \varrho_2 \cos \varphi_2 + \alpha_5 = -1$$

<Anm. 2>

$$\frac{2 \cos \varphi_1}{\varrho_1} + \frac{2 \cos \varphi_2}{\varrho_2} + \frac{1}{\alpha_5} = +2$$

Hieraus folgt  $\varrho_1 = 131^\circ 19' 3,05''$  und  $\varrho_2 = 64^\circ 4' 28,5''$  und es sind daher die beiden Wurzelpaare

$$-1,137414 \pm 1,293894 \sqrt{-1}$$

$$+0,317041 \pm 0,6521840 \sqrt{-1}$$

Die gegebene Gleichung zerfällt daher in die Faktoren :

$$x^2 + 2,274828x + 2,967872 = 0$$

$$x^2 + 0,634083x + 0,5258586 = 0$$

$$x - 0,6407460 = 0$$

Berechnet man von dem Produkte dieser Faktoren den Koeffizienten, der zu  $x^3$  gehört, so erhält man: "... + 1,000002, welcher Koeffizient erst in der 6-ten

von dem zweiten <dritten> Koeffizienten der gegebenen Gleichung verschieden ist."

#### Anmerkungen:

1) Seien  $|x_1| = |x_2| > |x_3| = |x_4| > |x_5|$  die Beträge der Wurzeln von

$$f(x) = x^5 + a_1 x^4 + a_2 x^3 + a_3 x^2 + a_4 x + a_5 = 0 \quad \text{und}$$

$$x_{1/2} = \vartheta_1 (\cos \varphi_1 \pm i \sin \varphi_1), \quad x_{3/4} = \vartheta_2 (\cos \varphi_2 \pm i \sin \varphi_2). \quad \text{Es gilt dann } |x_1| = |x_2| = \vartheta_1 \quad \text{und} \quad |x_3| = |x_4| = \vartheta_2.$$

Nach siebenmaliger Wurzelquadrierung erhält man aber, wenn  $a_i'$  die neuen Koeffizienten sind:

$$a_0' = 1$$

$$-a_1' = x_1^{128} + x_2^{128} + \dots + x_5^{128} \approx x_1^{128} + x_2^{128} = 2 \cdot \vartheta_1^{128} \cos 128 \varphi_1$$

$$a_2' = (x_1 x_2)^{128} + \dots + (x_4 x_5)^{128} \approx (x_1 x_2)^{128} = (\vartheta_1^{128})^2$$

usw.

Dort wo komplexe Zahlen in den Koeffizienten enthalten sind, verursachen die trigonometrischen Funktionen von Quadrierung zu Quadrierung einen Vorzeichenwechsel des betreffenden Koeffizienten. Man kann somit aus der Entwicklung der Gleichungen das Auftreten komplexer Wurzeln erkennen.

$a_2'$  wächst quadratisch im Rahmen der Näherung, weshalb sich  $\vartheta_1$  aus  $a_2'$  so berechnet:

$$\log a_2' = 15,1182428 \approx \log (\vartheta_1^{32})^2 \implies \vartheta_1$$

Analog findet man  $\vartheta_2$  aus  $a_4'$ :

$$\log a_4' = 24,7442072 \approx \log (x_1 x_2 x_3 x_4)^{128} = \log (\vartheta_1 \vartheta_2)^{256} \implies \vartheta_2$$

$$2) -1 = -a_1 = \sum_{i=1}^5 x_i \quad (+)$$

$$\begin{aligned} 2 = a_4 &= (\vartheta_1 \vartheta_2)^2 + \vartheta_1^2 x_5 \cdot \vartheta_2 e^{i \varphi_2} + \vartheta_1^2 \vartheta_2 e^{-i \varphi_2} x_5 + \\ &+ \vartheta_1 e^{i \varphi_1} \vartheta_2^2 x_5 + \vartheta_1 e^{-i \varphi_1} \vartheta_2^2 x_5 \implies \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 &= \underbrace{(\vartheta_1 \vartheta_2)^2}_{(=-a_5=1)} x_5 (x_5^{-1} + \frac{e^{i \varphi_2} + e^{-i \varphi_2}}{\vartheta_2}) + \frac{e^{i \varphi_1} + e^{-i \varphi_1}}{\vartheta_1} \quad (++) \end{aligned}$$

Aus den Gleichungen  $(+)$  und  $(++)$  lassen sich die Winkel  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  bestimmen.

Im Anschluß an dieses Beispiel werden die Situationen mit mehreren komplexen Nullstellen allgemein gefaßt, und dabei verschiedene exakte Berechnungsweisen, die von Näherungswerten ausgehen, beschrieben. Interessant ist dabei die folgende, im Grundgedanken wiedergegebene und heute gelegentlich Runge ( $[Z\ 1; 83]$ ) zugeschriebene Variante, weil daraus von Brodetsky und Smeal  $[B\ 6]$  eine praktische Weiterentwicklung des Gräffgedankens für betragsgleiche Wurzeln gefunden wurde.

Zunächst Gräffe  $[G\ 5; 23-29]$ :

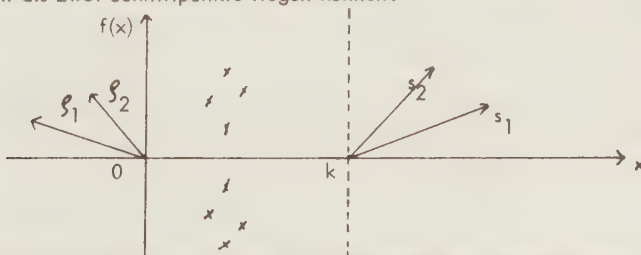
Man berechnet, wie gezeigt, die Beträge der Wurzeln von  $f(x) = 0$ . Bildet man noch die Transformierte  $f(x+k)$ , wobei  $k$  zweckmäßig gefunden oder gleich 1 gesetzt werden kann, so wird das Paar konjugiert komplexer Wurzeln selbst durch die Schnittpunkte der beiden um 0 bzw.  $k$  geschlagenen Kreise mit den Beträgen  $s$  und  $\varrho$  als Radien festgelegt. Die Größe des Imaginärteiles ändert sich bei dieser Verschiebung ja nicht (s. Fig.).

Sei  $a \pm i b$  eine komplexe Wurzel, so ist  $a + k \pm i b$  eine Wurzel der Transformaten. Deren "Modul" (= Quadrat des Betrages) sei

$$s^2 = (a+k)^2 + b^2;$$

Es gelte noch  $\varrho^2 = a^2 + b^2$ , woraus sich, da  $s$  und  $\varrho$  ja bekannt sind, eindeutig Real- und Imaginärteil  $a$  und  $b$  ergeben.

Treten aber mehrere Paare komplexer Nullstellen auf, so hat man entsprechend viele konzentrische Kreise um 0 bzw.  $k$  zu schlagen. Es lassen sich dann die Beträge  $\varrho_i$  und  $s_i$  nicht ohne weiteres zuordnen, weil auf einem Kreis mehr als zwei Schnittpunkte liegen können.



Brodetsky und Smeal haben für  $k$  einen infinitesimal kleinen Wert  $\varepsilon$  gesetzt, dessen Quadrat vernachlässigt werden kann. Dadurch erreicht man

unter anderem , daß die Beträge nur geringen Unterschied aufweisen , und sich leichter die zusammengehörigen Moduli herausfinden lassen , was beim Vorschlag Gräffes eher mehrdeutig werden kann (s.Fig. ) . Auch bei der Erstellung der Gleichungen mit den quadrierten Wurzeln , ergeben sich für  $f(x+\epsilon)$  gegenüber  $f(x+k)$  aufgrund der Vernachlässigbarkeit von  $\epsilon^2$  eine Reihe von Erleichterungen , die aber am Prinzip des Gräffe - Verfahrens nichts ändern . Die Bestimmung von Imaginär- und Realteilen erfolgt dann wieder nach einem exakten Verfahren , das für komplexe Nullstellen der vorausgehenden Approximation immer angeschlossen werden muß . ( Für diesen Sachverhalt findet man erstmals bei Ernst Schröder [S 5; 347-349 u. 357-361] eine genaue Begründung .)

Ein Schema , welches eine Erleichterung für die Bestimmung der Wurzelquadrierungen bietet , tritt erstmals bei dem Astronomen J.F. Encke ( 1791 - 1865 ) auf [E 1; 281 - 338] ; ( ein solches Schema findet man z.B. in [Z 1] ) . Enckes Arbeit ließ durch die Tatsache , daß sie von einem Praktiker stammt , das Gräffe - Verfahren über seine theoretische Bedeutung hinaus zu einem wichtigen Rechenmittel bis zur Erfindung von schnellen Rechenautomaten werden . Neben der Vertiefung der Studien von Gräffe für engliegende Wurzeln , scheint noch bemerkenswert , daß bei ihm durch ein dem Gräffeschen analogen Prinzip , Gleichungen gefunden werden , deren Lösungen die Kuben derjenigen der ursprünglichen Gleichung sind . Für die Praxis blieb es aber bei der Wurzelquadrierung .

In der Einleitung seiner Arbeit schreibt Encke :

" Für die Kürze derselben <Gräffe - Methode> spricht endlich der Umstand , daß die Bestimmung der sämtlichen Wurzeln einer Gleichung vom 7. Grade bei sechs imaginären Wurzeln , so weit der Wahrheit genähert , als Logarithmen von 7 Dezimalen es erlauben , in etwa zwei bis drei Stunden gänzlich vollendet sein wird . "

Dies gibt eine Vorstellung , wie mühsam und zeitraubend noch unhandlichere Methoden , etwa die Sternsche (s.S. 61 ff ) , für die damaligen Rechner gewesen sein mußten .

# VIII Verfahren zur Bestimmung der oberen und unteren Grenzen der Wurzeln

In der Praxis sind häufig , bedingt z.B. durch Meßergebnisse, Näherungswerte schon bekannt, so daß hier Methoden zur Approximationsverbesserung benötigt werden. Wenn aber keine Anfangsgrößen bekannt sind, und vielleicht nicht einmal gesichert ist , ob überhaupt reelle Nullstellen existieren, bedarf es einer Eingrenzung und Trennung sämtlicher Wurzeln. Die enge Verknüpfung der Separationsverfahren mit den eigentlichen Näherungsprozessen, erfordert es historisch beide in ihren Wechselwirkungen zu betrachten.

Von Interesse sind obere , bzw. untere Grenzen aller reeller Wurzeln, die Anzahl positiver und negativer Wurzeln und Separationen, wodurch auch komplexe Nullstellen gefunden werden sollen. Besonders die häufige Anwendung des Newton-Raphson-Verfahrens, welches ja gewisser , gesicherter Anfangswerte bedarf, förderte die Suche nach geeigneten Intervallen, in denen nur eine Wurzel liegt.

Den ersten weitreichenden Ansatz in dieser Richtung , allerdings schon in der Zeit vor Newton, hat René Descartes ( 1596 - 1650 ) mit seiner Zeichenregel gemacht [D 4; 73]:

"... es können nämlich so viele <positive> Wurzeln vorhanden sein, als die Anzahl der Wechsel der Vorzeichen + und - beträgt, und so viele falsche <negative> , wie oft zwei Zeichen + oder zwei Zeichen - aufeinanderfolgen." Diese von Descartes nicht bewiesene Behauptung lieferte letztlich den Grundgedanken, nämlich die Vorzeichen der Koeffizienten als Indikator für Wurzeleigenschaften zu verwenden, für eine Reihe bedeutender Separationsverfahren. Die Vorgeschichte dieser Zeichenregel und die Quellen, aus denen Descartes seine Kenntnisse hätte haben können, ist noch nicht geklärt.

Der älteste Hinweis, den Descartes vielleicht benutzt hat, ist eine Stelle aus Cardanos "Ars magna sive de regulis algebraicis" [C 6; 323]:

" Septimum notandum est quod cum fuerint denominationes extremae aequalis extremis, semper aequatio erit una tantum, et casus possibilis, quotquot fuerint denominationes: Cum vero denominationes intermediae fuerint aequales extremis,

tunc semper erunt plures aequationes in quaesito, et casus poterit cum hoc etiam esse impossibilis."

"Siebtens **ist** zu bemerken, daß, wenn die äußersten Benennungen den äußersten gleich sind <d.h., wenn  $x^n$  und  $a_0 x^0$  zu verschiedenen Seiten des Gleichheitszeichens stehen; Cardano schreibt eine Gleichung immer so, daß keine negativen Koeffizienten auftreten. Schreibe er  $f(x) = 0$ , so hieße dies, daß mindestens ein Zeichenwechsel eintritt>, so wird es stets nur eine Gleichheit geben <d.h. die Gleichung wird nur eine positive Lösung haben>, und das ist ein möglicher Fall, wieviel Benennungen auch vorhanden sind:

<Beispiele dazu sind  $x^2 = 3x + 10$  entspricht einem Zeichenwechsel

$$10 = x^2 + 3x \quad "$$

$$x^3 = 3x^2 + 6 \quad "$$

$$x^4 + 3x^3 + 7x^2 = 20x + 10 \quad \text{entspricht drei Zeichenwechsel.}>$$

Wenn aber intermediäre Benennungen <Potenzen  $x^i$ ,  $n < i < 0$  den äußersten gleich sind <d.h.,  $x^n + a_0 x^0$  ist gleich allen übrigen Gliedern mit  $x^i$ > dann gibt es in dem Gesuchten <bei der Aufgabe> mehrere Gleichheiten <mehrere positive Lösungen>, und es kann hierbei auch der Fall ein unmöglicher sein <d.h., es können auch komplexe Wurzeln, welche Cardano nicht berechnet, auftreten>."

An einer anderen Stelle der Ars magna [C 6; Kap I, § 14, S.226]

findet sich die Behauptung:

Wenn  $x^3 + a_1 x = a_2 x^2 + a_0$ , so kann es drei positive Wurzeln geben.

Man darf also modern so zusammenfassen:

Eine Gleichung kann sovielen positive Wurzeln besitzen, wie Zeichenwechsel zwischen den Koeffizienten vorkommen. Ist die Gleichung von der Form

$$x^n + a_0 = \sum_{i=1}^{n-1} a_i x^i,$$

(die Anzahl der Zeichenwechsel ist dann eine gerade Zahl, größer oder gleich 2) so gibt es entweder mehrere positive Wurzeln oder keine, wobei auch komplexe Wurzeln auftreten können. Dabei ist zu berücksichtigen, daß Cardano komplexe Lösungen als "unmögliche" bezeichnet.

Auch darüber, wie sich Cardano seine Regeln überlegt haben könnte, sind wir auf Vermutungen angewiesen. Im Falle einer quadratischen Gleichung

$$x^2 + a_1 x + a_0 = 0; \quad a_1, a_2 > 0$$

könnte Cardano so gedacht haben:

Cardano kennt für Gleichungen dritten Grades den Zusammenhang zwischen den Koeffizienten des linearen Gliedes und der Summe der Lösungen. Wir dürfen deshalb davon ausgehen, daß ihm dieser Sachverhalt auch für quadratische Gleichungen geläufig war. Wenn also bei einer quadratischen Gleichung alle Glieder auf einer Seite stünden, wäre ihre Summe gleich Null. Das kann nur sein, wenn man negative Zahlen einsetzt. Sobald aber ein Glied auf der rechten Seite steht, kann es auch positive Zahlen geben, welche die Gleichung erfüllen.

Cardano hat sicher auch an Hand von Beispielen gemerkt, daß es nicht gleichgültig ist, welches Glied auf der rechten Seite steht.

Falls  $x^2 + a_1 x + a_0 = 0$ , stellt man fest, daß bei zwei positiven Lösungen  $a_1 < 0$  wäre, also die Gleichung  $x^2 + a_0 = a_1 x$  lauten müßte. Dann allerdings könnte sie zwei positive Lösungen besitzen. Genauso kann die Überlegung für  $x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$ ,  $a_1 > 0$ , lauten.  $a_2$  müßte für drei positive Lösungen negativ sein, also rechts vom Gleichheitszeichen stehen. Ist das der Fall, kann es umgekehrt auch drei positive Lösungen geben. Man hat also eine notwendige Bedingung gefunden. Einfach läßt sich auch herausbringen, daß für  $x^2 + a_1 x = a_0$  bei zwei Lösungen mit gleichem Vorzeichen sich ein Widerspruch einstellt:

$$1. \quad x_1 > x_2 > 0 \implies$$

$$x_1^2 + a_1 x_2 = a_0 = x_2^2 + a_1 x_2 \implies x_1^2 + a_1 x_1 > x_2^2 + a_1 x_1 > x_2^2 + a_1 x_2.$$

Das ist ein Widerspruch; es kann höchstens eine Wurzel positiv sein.

$$2. \quad x_1 < x_2 < 0 \implies x_1 + a < x_2 + a \implies \underbrace{x_1(x_1 + a)}_{a_0} < \underbrace{x_2(x_2 + a)}_{a_0}$$

Durch diesen erneuten Widerspruch bleiben die Möglichkeiten höchstens einer positiven oder zweier komplexer Lösungen.

Eine Vielzahl von Beispielen könnte Cardano dazu veranlaßt haben, diese Erkenntnisse (ohne einen Beweis bekannt zu geben) allgemein zu formulieren.

Wenn gelegentlich von der Harriotschen Regel anstatt der Descarteschen die Rede ist, so deshalb, weil Leibniz [E 3; 80], und später vor allem Wallis, entweder irrtümlich Harriot die Priorität der Entdeckung der Zeichenregel zuerkannten, oder aber unveröffentlichtes Schriftum von Harriot mit einer Zeichenregel gesehen haben. In der "Praxis" [H 3] steht sie nicht. Dennoch könnte die für Harriot typische Produktschreibweise von Polynomen, und dessen ausführende Beschäftigung mit der Beziehung zwischen Koeffizienten und den Gleichungslösungen, die Idee zur Zeichenregel geweckt haben [H 3; 79 - 82].

Einen ersten vollständigen Beweis für die Zeichenregel hat 1728 J.A. Segner, zunächst für Gleichungen mit nur reellen Wurzeln gegeben [E 4; 307]. 1756, nachdem Gua de Malves bereits einen Beweis veröffentlicht hatte, [G 7; 72-96], folgte von Segner ein allgemeiner, der sich darauf stützt, daß ein Polynom durch Multiplikation mit  $(x - a)$ ,  $a > 0$ , wenigstens einen Zeichenwechsel hinzugewinnt [S 7; 292-299]. Ein in diesem Sinn elementar geführter Beweis findet sich in [M 2; 18 -23]. Von Gauß stammt die Begründung dafür, daß die Anzahl der positiven Wurzeln höchstens um eine gerade Zahl kleiner sein kann, als die der Zeichenwechsel [G 1; 67].

Der zweite wichtige Ansatz in Bezug auf Eingrenzungen, besteht in den Überlegungen von Michel Rolle (1652 - 1719). Er greift den Gedanken der Zeichenregel auf und transformiert eine zu lösende Gleichung  $F(x) = 0$  so, daß in der Koeffizientenfolge nur Zeichenwechsel vorkommen. Das bedeutet, daß sämtliche Wurzeln positiv sind (komplexe bleiben vorerst außer Betracht). Die auf Descartes zurückgehende Transformation lautet [D 4]:

In  $F(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ ,  $a_i \neq 0$ , wird  $x$  ersetzt durch  $\frac{a_m}{a_n} + 1 - y$ ; das ergibt  $h(y) = 0$ . Dabei gilt:  $a_m = \max \left\{ |a_i| \mid a_i < 0 \right\}$  [R 3; 120] und  $\frac{a_m}{a_n} + 1 =: g$

ist eine obere Grenze für die Wurzeln von  $F(x)$ . Daß dies tatsächlich der Fall ist, wurde erstmals 1748 von Maclaurin bewiesen [M 1; 172]. (Hinweise könnten von Rolle stammen, weil dieser einen Beweis skizziert hat [R 3; 123]). Wenn  $g$  eine obere Grenze ist, so bewirkt die Transformation  $g + y$  zunächst eine Verminderung aller Wurzeln von  $F(x)$  um den Wert  $g$ . Da  $g$  aber die größte

Wurzel noch übertreffen soll, hat die Transformierte nur noch negative Wurzeln. Der Übergang von  $y$  zu  $-y$  macht alle Wurzeln wieder positiv. Insbesondere ist dann 0 eine untere Grenze aller Wurzeln von  $h(y)$ . Obere, bzw. untere Grenze bezeichnet Rolle als "grande -" bzw. "petite hypothèse" [R 3; 124].

Beim Bemühen die Nullstellen von  $h(y)$  zu finden, versucht er zunächst sie alle durch sogenannte "hypothèses moyens" [R 3; 124] einzugrenzen. Als solche Zwischenwerte, welche die Wurzeln eingrenzen sollen, dienen die Nullstellen einer "cascade" [R 3; 125], die für uns mathematisch die Null gesetzte erste Ableitung von  $h(y)$  darstellt<sup>4)</sup>. Daß dadurch eine solche Trennung bewirkt wird, hat Rolle ein Jahr nach dem Erscheinen seiner "Traité d'Algèbre" bewiesen [C 5; 303 f]. Sollten die Nullstellen dieser Kaskade vom  $(n-1)$ -ten Grad, es genügen meist Näherungswerte, nicht ohne weiteres gefunden werden, so bildet man eine weitere Kaskade vom  $(n-2)$ -ten Grad, also die zweite Ableitung, und wenn nötig, hieraus weitere. Es ergibt sich dann eine Folge von Gleichungen, nämlich die auseinander hervorgehenden Ableitungen von  $h(y)$ , mit den Bezeichnungen: Erste Kaskade für die zuletzt entstehende lineare, und  $n$ -te Kaskade für die ursprüngliche Gleichung [R 3; 126]. Sind die Grenzen gefunden, schließt sich ein Näherungsprozess an, der durch mehr oder weniger gezieltes Probieren, z.B. wiederholte Bildung des arithmetischen Mittels, die Wurzel liefert.

Das Eingrenzungsverfahren, wie es von Rolle vorgeschlagen wurde, erlangte in dieser Form keine praktische Bedeutung, war aber Grundlage für eine Menge weitreichender Entdeckungen, welche später noch angesprochen werden. Das historisch bemerkenswerte an der Kaskadenmethode ist die systematische Suche nach Grenzen, von wo aus ein Näherungsverfahren starten kann. Bei sämtlichen früheren Verfahren wurde dieser Aspekt außer Acht gelassen.

Der Beweis, den Rolle in seinen "Démonstrations" [C 5; 305] für die Trennung der Wurzeln gibt, läßt sich so skizzieren:

<sup>4)</sup> Die Bildung einer Kaskade wird so beschrieben: "Man multipliziert jedes Glied der Gleichung mit dem zugehörigen Exponenten, man dividiert die Summe aller Produkte durch die Unbekannte, und man nimmt an, daß der Quotient Null sei."

Es wird gezeigt, daß die Kaskaden an den Nullstellen der Gleichung abwechselndes Vorzeichen besitzen müssen und dazwischen folglich Null sein, also eine Wurzel besitzen müssen. (Daß dies für stetige Funktionen tatsächlich gilt, wurde jedoch erst von Bolzano im "Rein analytischen Beweis ..." aus dem Jahre 1817 gezeigt.)

Für die Gleichung  $f(x) = (x - r_1)(x - r_2) = r_1 r_2 - (r_1 + r_2)x + x^2 = 0$

ergibt sich, wenn die Koeffizienten in folgender Weise mit den Gliedern  $y + i v$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ , einer arithmetischen Folge multipliziert werden, daß  $f(x)$  in  $g(x)$  übergeht.

In  $F(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$  geht  $a_i$  über in  $(y + i v) \cdot a_i$ , d.h. aus  $f(x)$  wird

$$g(x) = y r_1 r_2 - (y + v)(r_1 + r_2)x + (y + 2v)x^2.$$

An einer Nullstelle  $x = r_2$  gilt dann:

$$g(r_2) = r_2 v (r_2 - r_1).$$

Wäre  $y = 0$ , so würde das am Ergebnis nichts ändern; (falls  $v = 1$ , erkennt man, daß  $g(x) = x f'(x)$  ist).  $g(r_2)$  enthält also  $(r_2 - r_1)$  als Faktor und hängt im Vorzeichen davon ab, welche der beiden Wurzeln die größere ist. Offensichtlich gilt diese Überlegung auch für  $m x^n f(x)$  an der Stelle  $x = r_2$ .

Wenn nun  $\hat{f}(x) k(x) = f(x) \prod_{i=3}^n (x - r_i)$  für  $0 < r_1 < r_2 < r_3 \dots < r_n$

aufgestellt wird, und wieder mit einer Folge  $(y + i v)$ , z.B.  $y = 0$  und  $v = 1$ , koeffizientenweise belegt wird, so ist dies gleichbedeutend, wie wenn einzeln

$$\begin{array}{rcl} f(x) a_0 & \text{mit der Folge} & 0, 1, 2 \\ f(x) a_1 x & " & 1, 2, 3 \\ + f(x) a_{n-2} x^{n-2} & " & n-2, n-1, n \\ \hline ( = f(x) k(x) & " & 0, 1, 2, \dots, n ) \text{ umgebildet wird.} \end{array}$$

$$( k(x) = a_{n-2} x^{n-2} + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 ).$$

Jeder Term hat bei  $x = r_2$  den Faktor  $r_2 - r_1$  und  $f(x) k(x)$  enthält das Produkt  $(r_2 - r_1)(r_2 - r_3)(r_2 - r_4) \dots (r_2 - r_n)$ . An die Stelle von  $r_2$  kann aber jede Wurzel, z.B.  $r_{i0}$ , treten. Als Faktor von  $f(x) k(x)$  erscheint somit

$$\prod_{i \neq i_0}^n (r_{i0} - r_i) .$$

Sowie  $r_{i0}$  der Reihe nach  $r_1, r_2, \dots, r_n$  durchläuft, ändert sich jedesmal das Vorzeichen des Produkts. Also ergibt eine Kaskade, die ja durch die Folge  $0, 1, 2, \dots, n$  aus dem zu lösenden Polynom  $F(x) = f(x) k(x)$  entsteht, bei den Wurzeln von  $F(x)$  der Reihe nach abwechselndes Vorzeichen. Die Nullstellen der Kaskade liegen also zwischen denen der gegebenen Gleichung. (Mit unseren heutigen Kenntnissen kann die Begründung ohne "arithmetische Folge" gegeben werden :

$$F(x) = \prod_{i=1}^n (x - r_i) \implies F'(x) = \sum_{j=1}^n \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n (x - r_i) ; \quad \text{für } x = r_{i0} \text{ gilt :}$$

$$F'(x) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^n (r_{i0} - r_i) .$$

In der Algebra von Rolle aus dem Jahre 1690 werden auch die Sonderfälle von Mehrfachwurzeln und komplexen Wurzeln behandelt. Dabei werden Mehrfachwurzeln entsprechend einem Satz von Hudde [H 1] dadurch vermieden, daß die Gleichung und die nächstfolgende Kaskade (1. Ableitung) durch den gemeinsamen Faktor dividiert werden [R 3; 141 f]. Die Existenz von komplexen Nullstellen wird daran erkannt, daß bei einer beliebigen Kaskade die Zeichenwechsel unterbrochen sind, d.h., an zwei aufeinanderfolgenden Nullstellen der nächsthöheren Kaskade die Vorzeichen erhalten bleiben [R 3; 130] .

Bedeutsam ist die Tatsache, daß Rolle an keiner Stelle von Ableitungen spricht, obwohl es schwer fällt, seine Entwicklung hin zur Kaskadenmethode ohne unsere heutige Vorstellung von Differentialrechnung zu verfolgen. Möglicherweise könnte auch die Extremwertmethode von Fermat oder Hudde einen Hinweis liefern. Die Bildung der Kaskaden wird jedenfalls genau so beschrieben, wie formal ein Polynom abgeleitet wird. Eine zweite von Rolle aufgezeigte Möglichkeit besteht darin, für die Unbekannte  $v$  in  $f(v) = 0$  die Summe

$x + z = v$  zu setzen und nach Potenzen von  $x$  zu ordnen. Die Koeffizienten sind dann Polynome in  $z$ ; diese gleich Null gesetzt, ergeben gerade wieder die gesuchten Kaskaden [R 3; 127]. Damit ist Rolle nicht mehr weit von der später entdeckten Taylorentwicklung entfernt gewesen.

Auf die Bedeutung des Satzes von Rolle, hier in der ursprünglichen Form, braucht nicht besonders hingewiesen zu werden. Tatsächlich hat aber Rolles Kaskadenmethode nicht nur wegen der Wurzeltrennung, wie noch gezeigt wird, einen wichtigen Beitrag zur Entwicklung der Näherungsverfahren geleistet, sondern zur Gleichungslehre überhaupt. Hierzu gehört vor allem die Angabe einer oberen Grenze der Wurzeln mit Hilfe des größten negativen Koeffizienten, wie sie erst viel später von Maclaurin angegeben wird [M 1; 172].

Die vermutlich erste Veröffentlichung über ein Differenzenschema, welches zur Wurzelapproximation herangezogen wird, stammt von John Collins (1625 - 1683) [C 11]. Er schreibt: "It hath been observ'd by divers of this Nation, that in any AEuation, howsoever affected, if you give a Root, and find the Absolute number or Resolvend (which Vieta calls Homogenium Comparationis) and again give more Roots and find more Resolvends as to their first, second or third differences, ... imitate the Laws of the pure Powers of an Arithmetical progression of the same degree, that the highest Power or first term of the Equation is of." (Root heißt "Wert der Unbekannten" und nicht Wurzel der Gleichung. Die Gleichungskonstante ist "the Absolute number", welche bei Viète immer allein auf der rechten Gleichungsseite steht.)

Der Zusammenhang zwischen Funktionswerten, Differenzen und Grad der Funktion war schon bekannt. Im Vorwort heißt es auch: "... touching some late Improvements of Algebra in England ...".

Das Beispiel von Collins lautet:  $aaa - 3aa + 4a = N$ , mit der Unbekannten  $a$ .

|            |    |                                                             |   |     |        |        |          |
|------------|----|-------------------------------------------------------------|---|-----|--------|--------|----------|
| "If a be = | 10 | } Then N or the Absolutes or Resolvends will be found to be | } | 740 | 1.dif. | 2.dif. | 3.dif. " |
|            | 9  |                                                             |   | 522 | 218    | 48     |          |
|            | 8  |                                                             |   | 352 | 170    | 42     | 6        |
|            | 7  |                                                             |   | 224 | 128    | 36     | 6        |
|            | 6  |                                                             |   | 132 | 92     |        |          |

Daß ein solches Differenzenschema für reine Potenzen von Pascal im "Triangle Arithmétique" zum Radizieren benutzt wurde, hebt Collins besonders hervor.

Ausgehend von den bekannten  $n$ -ten Differenzen, könne man durch Addition Gleichungskonstanten finden, welche größer oder kleiner als die gegebene sind und somit Lösungen finden, welche einer Gleichung vom  $n$ -ten Grad genügen. Man muß sich ausreichend viele äquidistant gewählte Argumente  $x_i$  vorgeben und die Differenzen bis zu den konstanten Differenzen rechnen. Dann kann man rückwärtsschreitend weitere Funktionswerte ausrechnen, von denen man weiß, welche Argumente dazugehören. Die Absicht, welche eigentlich mit dem Differenzenschema verfolgt wird erklärt die Textstelle: "By this you may obtain divers Figures of the Root; and then the General Method of Vieta and Harriot runs away more easily...". Zudem kann man den Hinweis auf die Bedeutung der Methode Viètes entnehmen.

Ohne genauere Angaben berichtet Collins über Mathematiker, welche vorgeben "eine Methode gefunden zu haben, die unbekannte Wurzel einer Gleichung zu vermindern oder zu vergrößern, um sie einer ganzen Zahl gleich zu machen!". Sie würden sich dabei auf Albert Girards Methode der "Aliquot Parts" stützen [Invention Nouvelle en Algèbre, Amsterdam 1629]. Vor Collins scheint niemand das Prinzip der Wurzelverminderung zur Gleichungslösung bewußt angesprochen zu haben, wenngleich die meisten Verfahren daraus hervorgehen.

Eine weitaus klarere Darstellung erfuh die Differenzenmethode bei Thomas Fantet de Lagny (1660 - 1734) um 1705. In seiner Abhandlung wird ein Differenzenschema dazu benutzt, allein mit Additionen die Funktionswerte  $f(x_i)$  bei äquidistant gewählten Argumenten  $x_i$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$ , zu finden. Dazu bilde man folgende Differenzen  $[L\ 1]$ :

$$D_i^1 = f(x_i) - f(x_{i+1})$$

$$D_i^2 = D_i^1 - D_{i+1}^1$$

$$D_i^3 = D_i^2 - D_{i+1}^2 \text{ usw.}$$

Für  $f(x) = x^3 + x^2 - 7x + 2$  hätte man ein Schema der Art, wie es schon bei Collins vorkommt. Dabei ist es kein Zufall, daß die dritten Differenzen mit denen von Collins übereinstimmen.

| $x_i$     | $f(x_i)$ | $D_i^1$       | $D_i^2$ | $D_i^3$ |
|-----------|----------|---------------|---------|---------|
| 0         | 2        | 5             |         |         |
| 1         | -3       | -3            | 8       |         |
| $x_3 = 2$ | 0        | $-17 = D_3^1$ | 14      | -6      |
| 3         | 17       | -37           | 20      | -6      |
| 4         | 54       |               |         |         |

Man kann allgemein zeigen, daß die  $n$ -ten Differenzen  $D^n$  bei einem Polynom  $n$ -ten Grades konstant sind. Also kann man aus  $n+1$  Funktionswerten bei äquidistanten Argumenten die  $n$ -te Differenz berechnen.

Hilfssatz: Ist  $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ , so sind die  $n$ -ten Differenzen  $D_i^n(f)$  konstant.

Beweis:  $D_i^1 := D_i^1(f) = f(x+d) - f(x) = f(x) + d f'(x) + \text{höhere Abl.} - f(x)$   
 $=: g(x)$ , mit  $\text{grad } g = n-1$ ,  $d = x_i - x_{i+1}$

Da man für  $p < n$  auch  $D_i^n = D_i^{n-p}(D_i^p(f))$  schreiben kann, ist

$$\text{grad } D_i^{n-p}(f) = p \text{ und } \text{grad } D_i^n(f) = 0.$$

Durch einen Induktionsbeweis kann man zeigen, daß für eine reine Potenz  $x^n$  gilt:  $D_i^n(x^n) = n!d^n$  (vgl. z.B. [H 5; 39 f]).

Aus der offensichtlichen Linearität der Differenzenbildung,

$$D_i^n(a_s x^s + a_r x^r) = a_s D_i^n(x^s) + a_r D_i^n(x^r),$$

und dem Hilfssatz, ergibt sich für ein Polynom  $f(x)$ , daß die  $n$ -ten Differenzen gleich  $a_n n! d^n$  sind.

De Lagny hat dies nicht besiesen, sondern nur für Polynome bis zum 6. Grad verifiziert. Entscheidend für ihn war, daß man die  $n$ -ten Differenzen sofort angeben kann. Wenn man sich zusätzlich noch aus jeder Kolumne des "D - Schemas" einen Wert verschafft, so können nur durch Additionen weitere Funktionswerte bestimmt werden. Man erhält dabei Grenzen, zwischen denen reelle Wurzeln liegen müssen. Interessant wird das, wenn die Nullstellen außerhalb der für die  $n+1$  Funktionswerte gewählten  $n+1$  Argumenten liegen. Im

Beispiel ist eine zwischen 0 und 1 eingeschlossen ; 2 ist selbst eine Wurzel. Das Intervall, innerhalb dessen eine Nullstelle erkannt wurde, könnte nun wieder in , sagen wir Zehntel unterteilt werden. Mit  $d = 0,1$  anstatt  $d = 1$  , wie beim ersten Schema , läßt sich ein neues D - Schema aufstellen und die Nullstelle weiter eingrenzen. Allerdings ist dann die Zweckmäßigkeit des Verfahrens problematisch, denn bei einer Gleichung vierten Grades sind bereits vier Funktionswerte (  $f(0)$  ist ja bekannt ) zu bestimmen und außerdem 10 Differenzen. Dann hat man erst das Grundgerüst.

Führt man trotzdem so fort, wie beschrieben, kommt man zu einer Intervallschachtelung, wie sie Stevin vorgeschlagen hat (s.S. 13). De Lagny hingegen benützt die beiden Grenzen, um mittels einer "Règle générale", die sich als die regula aurea von Cardano herausstellt (s.S. 11), zu besseren Näherungen zu kommen.

Die Frage nach Intervallen, in denen höchsten eine Wurzel liegt, wurde u.a. von Edward Waring [W 4; 17 - 22] und anschließend mit denselben Grundgedanken von Lagrange bearbeitet.

Zunächst ohne Kenntnis der Arbeiten von Waring aus dem Jahre 1762, gelangte Lagrange zu seinen Ergebnissen. Ein Zitat aus der "Traité de la Résolution des Equations Numériques" zu Beginn, sollen den Wert verdeutlichen, den man in der zweiten Hälfte des 18. Jh. dem hier behandelten Problem beimaß:

" Die Untersuchungen der Grenzen der Wurzeln ist in der Theorie der Gleichungen das Nächste nach der allgemeinen Auflösbarkeit. Da bis jetzt die allgemeine Auflösung der Gleichungen nur bis zum vierten Grad reicht, und, wenn sie weiter möglich ist, wie bewiesen, nur durch Auflösung von Gleichungen viel höherer Ordnung geschehen kann, welches aber so zusammengesetzte Ausdrücke gibt, daß sie sich gar nicht mehr behandeln lassen; so beruht unter diesen Umständen die ganze Kunst der Auflösung der Gleichungen auf dem Aufsuchen von Grenzen. Auch kann man in der Tat, sobald man für jede Wurzel einzelne Grenzen gefunden hat, diese durch wiederholte Substitution zusammenziehen, und auf diese Weise der Wurzel beliebig nahe kommen.

Man hat schon gegen Ende des 17. Jh. die Notwendigkeit eingesehen, sich mit dieser Aufgabe zu beschäftigen < z.B. Rolle > " [L 3; Note 8] .

Die mathematische Behandlung dieses Problemkreises durch Lagrange soll, wegen der Aufmerksamkeit, den seine "Traité" in der Fachwelt geweckt hat, etwas ausführlicher dargestellt werden.

## Theorem II [L 3; 22]

Wenn man in einer beliebigen Gleichung  $\langle f(x) = 0 \rangle$ , welche eine oder mehrere reelle und ungleiche Wurzeln hat, nacheinander an Stelle der Unbekannten zwei Zahlen  $\langle p, q \rangle$  einsetzt, von denen die eine größer  $\langle p \rangle$  und die andere  $\langle q \rangle$  kleiner als die Wurzel sei, und sich gleichzeitig voneinander um weniger als die Differenzen zwischen dieser einen und jeder anderen Wurzel der Gleichung unterscheiden, ergeben diese beiden Einsetzungen notwendigerweise zwei Ergebnisse verschiedenen Vorzeichens.

Seien die  $x_i$ ,  $1 \leq i \leq m \leq n = \text{grd } f$ , die reellen Wurzeln, und

$p - q < |x_k - x_i|$ ,  $i \neq k$ , so gilt:

$\text{sign}(p - x_k) = -\text{sign}(q - x_k)$ , und für die übrigen reellen Wurzeln

$\text{sign}(p - x_i) = \text{sign}(q - x_i) \implies$  (für  $b_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n-m$ , konj. kompl.)

$$\text{sign } f(p) = \text{sign}(p - x_k) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^m (p - x_i) \prod_{j=1}^{n-m} (p - b_j) =$$

$$- \text{sign } f(q) = -\text{sign}(q - x_k) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^m (q - x_i) \prod_{j=1}^{n-m} (q - b_j) .$$

Als Korollar schließt sich an [L 3; 22] :

Bildet man die Folge der Funktionswerte  $f(td)$ ,  $t = 1, 2, 3, \dots$  und  $d \leq \min |x_k - x_i|$ , so besitzt diese Folge so viele Vorzeichenwechsel, wie  $f(x)$  ungleiche positive Wurzeln aufweist.

Nun kommt es darauf an,  $\min |x_k - x_i|$  zu ermitteln. Lagrange sucht deshalb eine Gleichung, deren Lösungen die Differenzen  $x_k - x_i$  sind [L 3; 24 ff]. Dazu entwickelt er für ein noch unbestimmtes  $u$  das  $f(x+u)$  nach  $u$ :

$$f(x+u) = \sum_{v=0}^n \frac{1}{v!} f^{(v)}(x) u^v .$$

Es ist  $f(x+u) = 0$ , wenn  $x+u = x_k$  ist. Setzt man  $x = x_i$  ein, so sind die Lösungen  $u = x_k - x_i$ , und eine davon ist Null. Es bleibt also eine Gleichung für  $u$ , welche vom Grad  $n-1$  ist :

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{j!} f^{(j)}(x_i) u^{j-1} = 0.$$

Setzt man der Reihe nach die Werte von  $x_i$  in  $f(x+u)$  ein, so erhält man  $n$  Gleichungen, aus denen die (noch unbekannten)  $x_i$  eliminiert werden müssen. Dieses Eliminieren führt zu einer Gleichung  $F(u) = 0$ , in der alle Differenzen der Wurzeln von  $f(x)$  Lösungen sind. Der Grad von  $F(u)$  wird also  $n(n-1)$  sein, und jeweils zwei dieser Differenzen unterscheiden sich nur durch das Vorzeichen. Damit treten in  $F(u)$  nur Potenzen von  $u^2$  auf. Setzt man  $u^2 = v$ , und  $N = \frac{1}{2}n(n-1)$ , so entsteht

$$G(v) = \sum_{\mu=0}^N v^{\mu} b_{\mu} = 0 \quad (\text{entsprechend } f_d(x^2) \text{ auf S. 47}),$$

mit den Wurzeln  $(x_k - x_i)^2$ ,  $1 \leq k, i \leq n$ .

Unter Berücksichtigung, daß die  $b_{\mu}$  durch eine Rekursionsformel aus den Koeffizienten von  $f(x)$  gewonnen werden können, kann so die Gleichung der "quadratischen Wurzeldifferenzen" aufgestellt werden. Für komplexe Wurzeln gilt das auf S. 47 gesagte.

Zur Separation in  $f(x)$  dient ein Wert  $\sqrt{c}^{-1}$ , wobei  $c$  die obere Grenze aller Wurzeln von  $G(v)$  ist. Die Intervalllänge  $p - q = \delta$  wählt man dann kleiner als  $\sqrt{c}^{-1}$  und setzt schrittweise  $\delta, 2\delta, 3\delta, \dots$  in  $f(x)$  ein. In jedem Intervall liegt dann höchstens eine Nullstelle.

Dieses Verfahren ist so umständlich, daß es, obwohl es allen Fällen von komplexen und mehrfachen Wurzeln gerecht wird, und Lagrange auch Vereinfachungen gegenüber der Arbeit von 1769 vorschlug [L 3; Note 3], nur von theoretischer Bedeutung blieb.

Angeregt durch das Problem bei Lagrange - zwischen welchen Grenzen liegen reelle Wurzeln - hat Budan du Boislaurent notwendige Bedingungen dafür gegeben, daß eine Gleichung  $n$  reelle Wurzeln innerhalb bestimmter Grenzen aufweist.

In einer 1803 im Institut de France vorgelesenen Arbeit kündigt er die Entdeckung der Bedingung an und beschreibt den Gebrauch der sich daraus ergebenden Regel. Diese wurde zusammen mit einigen erklärenden Zusätzen, 1807 publiziert [B 8] und 1822, ergänzt durch einen Beweis, von neuem abgedruckt.

Budan nimmt direkt Bezug auf Descartes' Zeichenregel und versucht ausdrücklich nur durch elementare Arithmetik das genannte Problem zu lösen. Es entstand daraus das erste praktikable Eingrenzungsverfahren, wenngleich es nicht seine Arbeit war, die für eine Weiterentwicklung sorgte, sondern die von ihm unabhängigen Leistungen Fouriers auf diesem Gebiet.

Im letzten Abschnitt des III. Kapitels von [B 8; 26] steht, man könne aus der Regel von Descartes folgende Behauptung herleiten:

"Eine Gleichung in  $x$  mit nur reellen Wurzeln hat so viele Wurzeln zwischen 0 und  $p$ , wie die nach  $x - p$  transformierte mehr Zeichenwechsel besitzt, als die Gleichung in  $x$ ."

Dahinter steht der Gedanke, daß die Transformation die Wurzeln um  $p$  vermindert und folglich alle die Wurzeln negativ werden, welche zwischen 0 und  $p$  lagen. Die Zeichenregel besagt dann, daß eine Gleichung so viele negative Wurzeln haben kann, wie Zeichenfolgen in ihr vorkommen. Da die ursprüngliche Gleichung nur Zeichenwechsel besaß, ist der Zusammenhang mit der obigen Behauptung hergestellt. In einem Anhang [B 8; 89] wird die "Budansche Regel" dann explizit angegeben:

"Wenn eine Gleichung  $n$  Wurzeln zwischen 0 und  $p$  besitzt, so muß die transformierte Gleichung in  $x - p$  wenigstens  $n$  Zeichenwechsel weniger aufweisen, als die ursprüngliche."

Budan drückt in einer darauffolgenden Bemerkung die Vermutung aus, daß dieser Satz wahrscheinlich auf alle Gleichungen, also auch auf diejenigen mit komplexen Nullstellen, anwendbar sei. Am Rande sei daran erinnert, daß die Transformation ganz analog dem Horner - Schema durchgeführt wurde.

Im ersten Buch seiner "Analyse des Equations déterminées" [F 1] (posthum 1831, als Vorlesung schon 1789 gehalten) behandelt Fourier eine allgemeine Methode, zwei Grenzen für jede reelle Wurzel zu finden und die komplexen Wurzeln festzustellen. Kernstück der Abhandlung sind das Theorem A (Budansche Regel) und die Regel B. Beides wird noch erläutert werden. Auch für Fourier war die Zeichenregel, er betont das ebenso wie Budan, die Grundidee gewesen, von der ausgehend weiterführende Überlegungen angestellt werden konnten.

Gegeben sei wieder ein Polynom  $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$  und sämtliche

Ableitungen, die in der Folge  $f^{(n)}, f^{(n-1)}, \dots, f', f$  dargestellt seien. Die Behauptung lautet, daß  $f(x)$  zwischen zwei reellen Zahlen  $a$  und  $b$  so viele reelle Wurzeln, oder um eine gerade Anzahl weniger hat, wie die Differenz der Zeichenwechselanzahl in den Folgen

$$\text{sign } f^{(n)}(a), \text{sign } f^{(n-1)}(a), \dots, \text{sign } f'(a) \quad \text{und}$$

$$\text{sign } f^{(n)}(b), \text{sign } f^{(n-1)}(b), \dots, \text{sign } f'(b).$$

Bei Budan wurden, wenn man bedenkt, daß die Koeffizienten einer Gleichung gewisse Ableitungen sind, lediglich die Folgen

$$\left( \text{sign } \frac{1}{i!} f^{(i)}(0) \right) \quad \left\{ i = 0, 1, 2, \dots, n \right\} \quad \text{und}$$

$$\left( \text{sign } \frac{1}{i!} f^{(i)}(p) \right) \quad \left\{ i = 0, 1, 2, \dots, n \right\} \quad \text{miteinander ver-}$$

glichen; der Quotient  $\frac{1}{i!}$  ändert nichts am Vorzeichen.

Der Satz von Descartes ist eine Folgerung aus diesem Theorem A, denn man braucht als Grenzen nur  $\pm \infty$  und 0 zu nehmen [F 1; 95].

Zum obigen Theorem gehört noch eine Regel B, die es gestattet festzustellen, ob die in einem Intervall angezeigten Wurzeln reell oder imaginär sind:

Stellt man fest, daß in  $]a, b[$  zwei Zeichenwechsel verloren gehen, so kann es sich entweder um zwei reelle oder ein Paar konjugiert komplexer Wurzeln handeln. Bildet man die Tangenten in  $a$  bzw.  $b$  an die Funktionskurve, und berechnet jeweils den Schnittpunkt

$$x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

mit der  $x$ -Achse, so gilt für zwei reelle Nullstellen von  $f(x)$  und  $b > a$ :

$$b - \frac{f(b)}{f'(b)} > a - \frac{f(a)}{f'(a)}.$$

Im Falle komplexer Lösungen kann sich das Ungleichheitszeichen umdrehen [F 1; 114]. Mehrfachwurzeln werden von Fourier noch gesondert behandelt [F 1; 87-91]. Für reelle Lösungen schließt man:

$$(+)\quad \frac{f(b)}{f'(b)} - \frac{f(a)}{f'(a)} < b - a;$$

ansonsten handelt es sich um imaginäre Wurzeln. Kommt es nun vor, daß bei  $f''(x)$  noch kein, und der erste Zeichenwechsel bei  $f'(x)$  und der zweite bei  $f(x)$  auftritt (Zeichenwechsel zwischen  $f^{(i)}(a)$  und  $f^{(i)}(b)$ ), so ist die Bedingung (+) zu prüfen: Ist sie nicht erfüllt, so liegt ein Paar komplexer Wurzeln vor. Wenn sie jedoch erfüllt ist, können die Lösungen sowohl reell als auch komplex sein. Teilt man das Intervall  $]a, b[$  durch einen Zwischenwert  $c$ , gegebenenfalls durch mehrere, dann kann man erreichen, daß zwei reelle Wurzeln getrennt werden, oder aber (+) für irgend ein kleineres Intervall nicht erfüllt ist [F 1; 114 f]. Fourier gibt hierfür keinen exakten Beweis an.

Der Beweis für das Theorem A wird allerdings sehr breit dargelegt [F; 82-97] und soll hier in seinen Kernpunkten wiedergegeben werden.

Zunächst läßt man  $x$  von  $-\infty$  bis  $+\infty$  laufen und betrachtet dabei die Vorzeichenwechsel der Funktionenfolgen. Offenbar hat die Folge mit  $-\infty$  lauter Zeichenwechsel und die mit  $+\infty$  lauter Zeichenfolgen. Da die Folgen  $n+1$  Terme haben, gehen zwischen der Folge mit  $-\infty$  und der mit  $+\infty$  die  $n$  Zeichenwechsel verloren, eben so viele, wie Wurzeln vorhanden sind.

Ebenfalls ist klar, daß ein Zeichenwechsel erst dann eintreten kann, wenn  $x$  durch eine Nullstelle einer der  $f^{(i)}(x)$  geht. Nimmt man eine einfache Wurzel  $w$  von  $f(x)$  mit zwei benachbarten Werten  $w-d, w+d$  und vergleicht die Vorzeichenfolgen, so wird sich nur das Vorzeichen von  $f(x)$  ändern. Die Folgen gewinnen dieses Aussehen (nur die Zeichen):

für  $w-d$  : ..... ,  $\pm$  ,  $\mp$

"  $w$  : ..... ,  $\pm$  , 0

"  $w+d$  : ..... ,  $\pm$  ,  $\pm$  [F 1; 82 - 84] .

Was geschieht, wenn eine der abgeleiteten Funktionen und nicht  $f(x)$  Null wird? Für hinreichend kleines  $d > 0$  gilt:

$f^{(i)}(w+d) = f^{(i)}(w) \pm f^{(i+1)}(w)d \pm \text{kleine Terme}$ , und

$\text{sign } f^{(i)} = -\text{sign } f^{(i+1)}$  und  $\text{sign } f^{(i+1)}(w+d) = \text{sign } f^{(i+1)}(w)$  .

Für diese drei aufeinanderfolgenden Ableitungen hat man diese möglichen Zeichenfolgen:

$$w - d : \dots \pm \mp \pm \dots \quad \quad \quad \dots \pm \mp \mp \dots$$

$$w : \dots \pm 0 \pm \dots \quad \text{oder} \quad \dots \pm 0 \mp$$

$$w + d : \dots \pm \pm \pm \dots \quad \quad \quad \dots \pm \pm \mp \dots$$

Es gehen

also kein oder zwei Zeichenwechsel zwischen der Folge für  $w - d$  und der für  $w + d$  verloren, wenn eine der abgeleiteten Funktionen Null wird. Ein Zeichenwechsel hinzugewonnen wird auch nicht [F 1; 85 - 87]. Ähnlich wird für  $f(a) \neq 0$  gezeigt, wenn mehrere, sagen wir  $\nu$ , aufeinanderfolgende Ableitungen gleichzeitig verschwinden bei  $a$ , so gehen entweder  $\nu$  Zeichenwechsel verloren für gerades  $\nu$  oder  $\nu \pm 1$  für ungerades  $\nu$ . Bei Fourier folgen noch Überlegungen bezüglich mehrfacher und komplexer Wurzeln.

Ein Beispiel möge den Rechenaufwand zeigen. Es stellt sich vor allem heraus, daß der Aufwand in der Praxis wesentlich geringer ist, als man aufgrund der Theorie vermuten würde. Tatsächlich läßt sich der Budan - Fouriersche Satz, wie das Theorem A später genannt wurde, bis zum Ende des 19. Jh. als gängiges Separationsverfahren in den Algebralehrbüchern verfolgen [W 5], [S 8].

Sei  $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 2$ , dann ist

$$f'(x) = 3x^2 + 4x - 3$$

$$f''(x) = 6x + 4$$

$$f'''(x) = 6.$$

Die zunächst willkürlich gewählten Grenzen seien  $-10, -1, 0, 1$ ; die Zeichenfolgen lauten dann:

|         | $f'''$ | $f''$ | $f'$ | $f$ |
|---------|--------|-------|------|-----|
| $-10 :$ | +      | -     | +    | -   |
| $-1 :$  | +      | -     | -    | +   |
| $0 :$   | +      | +     | -    | +   |
| $1 :$   | +      | +     | +    | +   |

Der Vergleich der Folgen für  $-10$  und  $-1$  zeigt, daß in dem zugehörigen Intervall eine reelle Wurzel liegt, in  $] -1, 0[$  braucht keine gesucht zu werden, denn der Zeichenwechselverlust ist Null, und in  $] 0, 1[$  muß man zwei Nullstellen suchen. Durch weitere Intervallteilung ist nun zu prüfen, ob es sich

um zwei reelle oder ein Paar komplexer Wurzeln handelt. Zunächst die Prüfung, ob die Bedingung (+) erfüllt ist :

$$\frac{f(1)}{f'(1)} - \frac{f(0)}{f'(0)} = \frac{20}{21} < 1, \text{ also muß weiter unterteilt werden.}$$

|       | $f'''$ | $f''$ | $f'$ | $f$ |
|-------|--------|-------|------|-----|
| 0 :   | +      | +     | -    | +   |
| 0,5 : | +      | +     | -    | +   |
| 1 :   | +      | +     | +    | +   |

Zwischen 0,5 und 1 gehen zwei Zeichenwechsel verloren. Die Bedingung (+) ist jetzt aber verletzt :

$$\frac{f(0,5)}{f'(0,5)} - \frac{f(1)}{f'(1)} = \frac{70}{24} > 1.$$

In  $]0,5; 1[$  hat  $f(x)$  zwei komplexe Nullstellen. Von den erkennbar gewordenen Grenzen aus setzt man das eigentliche Näherungsverfahren an, bei Fourier und in dieser Zeit fast ausschließlich, das Verfahren von Newton - Raphson [F 1; 11].

Der wesentliche Fortschritt Fouriers gegenüber Lagrange besteht, abgesehen von den leichter zu gewinnenden Hilfsgleichungen, darin, daß von vornherein klar wird, in welchen Intervallen überhaupt nach Wurzeln gesucht werden muß. Fourier selbst drückt dies indirekt in einer Kritik über Lagranges Verfahren aus:

"Eine Auflösungsmethode, welche nicht die Intervalle, in denen die Wurzeln gesucht werden müssen, angibt sei sehr mangelhaft, denn die Intervalle, in denen die Existenz von Wurzeln möglich ist, sind weit ausgedehnter, als die Intervalle, in denen sich Wurzeln finden können. Aus diesem Grunde soll man nicht von derjenigen Methode Gebrauch machen, welche darin besteht, der Reihe nach Zahlen  $\Delta$ ,  $2\Delta$ ,  $3\Delta$ , ... usw., deren Differenz kleiner als die kleinste Differenz zwischen zwei Wurzeln ist, einzusetzen; denn man kann über sehr große Intervalle, in denen man Wurzeln sucht operieren, obgleich es von vornherein klar zu erkennen ist, daß es dort keine geben kann" [F 1; 24].

Doch auch Fouriers Vorgehen erfüllte noch nicht alle Anforderungen der Praxis. Schnuse [S 4; 129 - 140] stellte die Hauptmängel heraus:

1. Man weiß zwar, ob in einem Intervall Wurzeln liegen, aber es bedarf im

allgemeinen Fall eines großen Rechenaufwandes, um die Art der Wurzel herauszufinden.

2. Wenn in einem Intervall Wurzeln angezeigt sind, so müssen leitende Prinzipien für die weitere Teilung angegeben werden, welche bislang gefehlt haben.

3. Dem Aufsuchen von Mehrfachwurzeln ist vor der Anwendung des Trennungsvorgangs eine Polynomdivision von  $f(x)$  und  $f'(x)$  vorzuschicken.

Diese Mängel vermeidet Charles Sturm ( 1803 – 1855 ) durch seine bis heute in der numerischen Mathematik angewandten Ketten von Funktionen. Da diese nach Sturm benannten "Sturmschen Ketten" in fast allen einschlägigen Lehrbüchern behandelt werden, folgen hier nur knappe Andeutungen .

Sturm geht von dem Euklidischen Algorithmus zur Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers von  $f(x) =: f_0$  und  $f'(x) =: f_1$  aus. Er schreibt ihn so, daß der Rest jeweils ein negatives Vorzeichen erhält, also:

$$\begin{aligned} f(x) &= f_0 = f_1 q_1 - f_2 \\ f'(x) &= f_1 = f_2 q_2 - f_3 \\ &\vdots \\ f_i &= f_{i+1} q_{i+1} - f_{i+2} \\ &\text{usw.} \quad , i = 0, 1, 2, \dots, n = \text{grad } f . \end{aligned}$$

Weil der Grad von  $f_{i+2}$  kleiner als der Grad von  $f_i$  minus 2 ist, wird  $f_n$  im allgemeinen eine Konstante sein. Wenn allerdings ein  $f_i = 0$  wird für  $2 \leq i \leq n$ , so ist  $f_{i-1}$  größter gemeinsamer Teiler von  $f$  und  $f'$ , der ja gerade die Mehrfachwurzeln von  $f(x)$  enthält. Oder es ist  $f_n$  eine von Null verschiedene Konstante, d.h. bei keiner Einsetzung in die  $f_i$  ändert sich ihr Vorzeichen. Falls alle  $f_i \neq 0$  sind, nennt man die Folge der  $f_i$  eine Sturmsche Kette. Der Satz von Sturm lautet nun :

Wenn  $a < b$  und  $f(a), f(b) \neq 0$ , so ist die Differenz der Zeichenwechsel zwischen den beiden Sturmschen Ketten für die Einsetzungen  $a$  und  $b$  gleich der Anzahl der Nullstellen des Polynoms  $f(x)$  im abgeschlossenen Intervall  $[a, b]$ .

Dieser Satz gestattet es zum ersten Male die genaue Anzahl der reellen Wurzeln zwischen zwei gegebenen reellen Zahlen zu bestimmen, während frühere Kriterien nur ein Höchstmaß für diese Anzahl lieferten. Außerdem werden Mehrfachwurzeln durch den Rechengang ausgeschieden, so daß, wenn die gesteckten Grenzen  $a$  und  $b$  alle reellen Nullstellen umfassen, auch die genaue Anzahl komplexer Lösungen bekannt wird. Lokalisiert werden jene aber nicht.

Sturms Lehrsatz wurde im Mai 1829 der Pariser Akademie vorgelegt und dann im Bulletin scientifique de Férussac ( Sec. 1, II ) 1829 ohne Beweis veröffentlicht [§ 14] . Einen solchen Beweis hat 1830 in der Wiener Zeitschrift für Mathematik und Physik , Bd. 7 , von Ettinghausen gegeben, während Sturms vollständige Abhandlung erst 1835 erschien.

Berücksichtigt man , daß Sturm selbst sagt, seine Anregung sich mit diesem Gebiet zu beschäftigen, stamme aus der vollen Kenntnis von Fouriers "Analyse der Equations déterminées " , welche er noch vor der Drucklegung ( 1831 ) habe einsehen können, so spannt sich ein weiter Bogen von der Descarteschen Zeichenregel bis zu den Sturmschen Ketten. Daß es heute auch noch andere Trennungsmöglichkeiten gibt, z.B. die Gerschgorinschen Kreise , ändert nichts an der Brauchbarkeit der Sturmschen Methode.

Im vorliegenden Kapitel sind längst nicht alle Versuche, das Problem der Wurzeingrenzung zu lösen , berücksichtigt. Es fehlen die geleisteten Beiträge von Gua de Malves, Euler , Cauchy, Stirling und die von J.R. Young und Laguerre, jedoch gingen von ihnen nicht die entscheidenden Impulse aus, weshalb die Beschränkung auf die im Kapitel hervorgehobenen Verfahren gerechtfertigt erschien.

## IX Spezielle Entwicklungen im 19. Jahrhundert

Sieht man nach, welche Methoden zur numerischen ( also approximativen ) Lösung algebraischer Gleichungen gelehrt werden, z.B. in [E 9], [S 13], [Z 1], [H 4], so bemerkt man, daß die Grundzüge der Methoden am Anfang der des vorigen Jahrhunderts im wesentlichen bekannt waren.

Hinzu kamen Verfahren für besondere Gleichungstypen, wovon die für Trinome ein verhältnismäßig weites Interesse fanden. Gleichungen von der Form

$$x^{m+n} + ax^m + b = 0$$

enthalten als Spezialfälle quadratische und kubische Gleichungen und werden in der Praxis häufig approximativ und nicht durch Resolventenbildung gelöst. Die hierfür erarbeiteten Mittel stützen sich im wesentlichen, wie von Gauß vorgeschlagen [G 1], auf die Benützung von Logarithmen und trigonometrischen Funktionen. Die Gleichungen werden so umgeformt, daß solche zwischen Logarithmen oder Winkelfunktionen entstehen; aus den entsprechenden Tabellen kann man Lösungen dann mehr oder weniger gezielt herausuchen ( vgl. z.B. [W 5; 352 - 357] ).

Von der theoretischen Seite her waren Versuche mit Reihen interessanter; wenn man von den Fortschritten mit rekurrenten Reihen absieht, so gingen hiervon aber keine entscheidenden Entwicklungen für die Praxis aus. Sie sind statt dessen mit als ein Beleg für einen Umdenkprozess zu sehen, in dem nicht mehr so sehr die Suche nach neuen Verfahren im Vordergrund steht, als vielmehr das Bestreben, die bereits bekannten auf gesicherte Grundlagen zu stellen. Dabei wird es belanglos, ob etwaige Konvergenzkriterien für den Rechner nicht umständlicher zu handhaben sind, als bloßes Probieren.

Auffallend in dieser Zeit sind unüberschaubar viele Arbeiten, die von reinen Praktikern, häufig Nicht-Mathematikern, verfaßt waren, und die sich mit der Aufbereitung der bekannten Verfahren für die Bedürfnisse in den Naturwissenschaften, der Technik, des Versicherungswesens und des Militärs beschäftigten. Dabei entstanden aber auch viele Einzelpublikationen, die im Titel eine neue Methode ankündigten, aber letztlich nur die regula falsi oder die Intervallschachtelung in irgend einer Form wiedergeben. Die für eine Weiterentwicklung der Verfahren wirklich relevanten Forschungen wurden fast ausschließlich in Fachzeitschriften veröffentlicht.

Die ebenfalls zu Beginn des 19. Jh. bewiesene Nichtauflösbarkeit der

Gleichungen höheren als vierten Grades, mochte wohl verschiedentlich die Bemühungen um Näherungsprozesse verstärkt haben. Da aber bereits kubische Gleichungen leichter approximativ gelöst werden, als durch algebraische Auflösung, und die Nichtauflösbarkeit ohnehin schon lange angenommen worden war, scheint diese für die Algebra bedeutende Tatsache keinen unmittelbaren Einfluß auf die numerischen Methoden ausgeübt zu haben.

Im Zusammenhang mit Iterationsprozessen war bereits von der transzendenten Kepler - Gleichung die Rede. Ein Anliegen der hier besprochenen Epoche war es ebenfalls, den Mangel an geeigneten Verfahren für die näherungsweise Lösung von transzendenten Problemen zu beseitigen, umso mehr, als diejenigen für algebraischen Gleichungen nicht immer anwendbar sind. Dies ist vor allem dann der Fall, wenn die betreffende Methode eine endliche Anzahl von Lösungen voraussetzt.

Als Antwort auf eine Preisfrage der Gesellschaft der Wissenschaften in Kopenhagen im Jahre 1837, hat sich Stern mit einem allgemeingültigen Verfahren für transzendente Gleichungen befaßt [S 11]. Frühere Ansätze zu einem solchen Unternehmen findet man z.B. bei Euler, aber auch bei Lagrange, Legendre und Cauchy. Euler löste  $\sin z = \frac{1}{2}$ , indem er das Bemoulli - Verfahren auf die entsprechende, abgebrochene Sinusreihe anwandte [E 6; 1, I. § 355]. Mit Hilfe von Reihenentwicklung und deren Inversion versuchte Lagrange Auflösungen zu finden. Es ließ sich aber kein hinreichendes Konvergenzkriterium angeben [L 5]. Legendre benutzte ein Linearisierungsverfahren für die Lösung einer algebraischen oder transzendenten Gleichung, welche im Grunde auf die Newtonsche Vorschrift hinausläuft [L 6; art. 119]. Bei analytischen Funktionen kann bei bestimmten Argumenten Divergenz eintreten, sodaß ein Abbrechen nach dem linearen Term, wie es nach Newton zu geschehen hat, einen groben Fehler bedeuten würde.

Cauchy, der Legendres Gedanken aufgegriffen hat, konnte die Fehler vermeiden, indem er nur beliebig oft stetig differenzierbare, transzendente Funktionen mit

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f^{(n)}(x) = +\infty \text{ für}$$

z.B. Exponentialfunktionen, zuläßt. Aber gerade diese Einschränkung macht den Vorschlag für den Praktiker unbedeutend.

Stern stützt sich bei seinen Versuchen wieder auf Andeutungen aus Fouriers "Analyse" [S 11; 8] . Nachdem gesichert ist, daß die Funktion im betrachteten Definitionsbereich hinreichend oft stetig differenzierbar ist, versucht man Grenzen anzugeben, zwischen denen die Wurzeln eingeschlossen werden können. Hierzu wird das Fouriersche Separationsverfahren abgewandelt [S 11; 13 ff] . Da man bei transzendenten Funktionen nach noch so vielen Schritten auf keine Konstante kommt, ( weshalb man auch nicht sagen kann, wieviele reelle Wurzeln zwischen zwei beliebig gewählten Grenzen sind ) müssen die Zwischenräume in kleinere , nach bestimmten Gesetzen gebildete, eingeteilt werden. Man sucht einen Differentialquotienten  $f^{(n)}(x)$  , der so beschaffen ist, daß er zwischen zwei Grenzen  $a$  und  $b$  sein Zeichen nicht ändert und somit keine Wurzel besitzt. Dieser Differentialquotient spielt in Bezug auf diese Grenzen die gleiche Rolle , wie die Konstante in der Reihenfolge der Ableitungen bei algebraischen Gleichungen. ( Es wird gezeigt, daß man einen solchen Differentialquotienten immer finden kann [S 11; 14 f] . )

Gibt man einen Wert  $a$  vor, für den eine Ableitung ein bestimmtes Zeichen hat, so findet man wegen der Stetigkeit auch ein  $b = a + d$  , wofür das gleiche Zeichen herauskommt. In den beiden Zeichenreihen von  $f^{(i)}(a)$  und  $f^{(i)}(b)$  ,  $0 \leq i \leq n$  , vergleicht man wieder die Anzahl der Zeichenwechsel und kann an Hand von Zeichenwechselverlusten aussagen, ob im untersuchten Intervall überhaupt Wurzeln liegen. Wieviele Wurzeln in  $[a, b]$  jedoch liegen, kann man nicht sagen, sondern nur eine Mindestanzahl dafür nennen. Das sich anschließende Newton - Raphson - Verfahren wird dann mehr oder weniger aufgrund der Vermutung angewandt, daß das gewählte Intervall für die Approximation hinreichend eng war.

Nun ist es aber so, daß man die meisten in der Praxis auftretenden transzendenten Gleichungen gut im Griff hatte, und deshalb mußte der doch recht große Aufwand in Sterns Vorschlag nicht getrieben werden. Im allgemeinen genügte bei ausreichender Vorsicht ein einfaches Iterationsverfahren. Interessant ist darum vor allem der Aspekt, einem bekannten Verfahren einen weitgreifenderen Geltungsbereich zu verschaffen.

Mehr als die Lösbarkeit transzendenter Gleichungen beschäftigte die Mathematiker die Approximation komplexer Zahlen. Hier kann mit einiger Berechtigung das Vorgehen William Rutherfords herausgestellt werden,

denn es wird öfter zitiert und in die Reihe der wichtigen Arbeiten auf dem Gebiet der numerischen Mathematik gestellt [S 11; Vorwort] . Besonders die Behandlung der Rutherfordschen Methode Bei Schnuse [S 4; 343 - 362] erschien bedeutsam, denn Schnuses Buch ist das erste umfangreiche und in deutscher Sprache verfaßte Lehrbuch über Näherungsfragen.

Rutherfords Methode [R 5; 3 - 5] , welche natürlich nur ein Hilfsmittel für den eigentlichen Näherungsprozess sein kann, beruht darauf, die Wurzeln einer Gleichung , in der ein Paar komplexer Wurzeln  $(u \pm i v)$  vorkommt, zunächst um den Realteil zu vermindern und aus einer noch zu gewinnenden Gleichung  $v$  zu bestimmen. Es sei

$$(1) \quad f(x) = x^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i = 0$$

zu lösen. Mit  $x = x_1 + u$  erhält man eine Gleichung

$$g(x_1) = x_1^n + \sum_{i=0}^{n-1} A_i x_1^i \quad \text{mit}$$

$$(2) \quad A_i = \frac{1}{i!} f^{(i)}(u) .$$

Ferner sei  $p(x) = x^{n-2} + \sum_{i=0}^{n-3} b_i x^i$  das Polynom mit der Eigenschaft

$$f(x) = p(x) (x - u - i v) (x - u + i v) ,$$

so daß man durch Koeffizientenvergleich erhält :

$$(3) \quad a_i = b_{i-2} - 2 b_{i-1} u + b_i (u^2 + v^2)$$

für  $0 \leq i \leq n-1$  ,  $b_{n-2} = 1$  ,  $b_{n-1} = 0$  .

Substituiert man für die  $a_i$  in den  $A_i$  von (2) die Ausdrücke von (3) , ergibt sich , was bei Rutherford lediglich für die in der Rechenpraxis gängigen Fälle verifiziert wurde :

$$A_{n-1} = \frac{1}{(n-3)!} p^{(n-3)}(u)$$

$$A_{n-2} = \frac{1}{(n-4)!} p^{(n-4)}(u) + v$$

$$A_{n-3} = \frac{1}{(n-5)!} p^{(n-5)}(u) + A_{n-1} v$$

$$A_{n-4} = \dots + A_{n-1} v - v^2$$

usw. ,

wobei  $A_0$  und  $A_1$  nur noch Polynome in  $v$  sind, in denen die restlichen  $A_i$  als Koeffizienten auftreten, und die höchste Potenz von  $v$ , nämlich  $n - \left[\frac{n}{2}\right]$ , vorkommt.  $u$  kann näherungsweise aus (2) und (4) so gewonnen werden: Aus  $A_0$  und  $A_1$  kann näherungsweise  $v$  eliminiert werden, wenn, was dem Verfahren Verfahren zugleich die Grenzen der Brauchbarkeit auferlegt, der Grad von  $f$  nicht über 8 geht. Praktisch muß aber  $n < 6$  sein.

Ist  $v$  aus  $A_0$  und  $A_1$  eliminiert, können für  $A_0$  und  $A_1$  und die darin enthaltenen  $A_i$  die entsprechenden  $f^{(i)}(u)$  eingesetzt werden. Als einzige Unbekannte bleibt  $u$ .  $v$  findet man etwa aus den nunmehr berechneten  $A_i$  und den entsprechenden Polynomen in  $v$ . Der tatsächlich durchzuführende Näherungsprozess für die Bestimmung von  $u$  geschieht aber mit dem Horner - Schema und dem Newton - Verfahren.

Eine Arbeit, die sich von der Praxis schon sehr weit entfernt hat, stammt von Fürstenau (1860) und beschäftigt sich mit dem Einsatz von Determinanten linearer Gleichungssysteme für Näherungslösungen [F 3].

Multipliziert man eine Gleichung

$$x^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i = 0$$

der Reihe nach mit  $x$ ,  $x^2$ ,  $x^3$ , ... so erhält man ein System von Gleichungen

$$x^{n+r} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^{i+r} = 0, \text{ für } r = 0, 1, 2, \dots$$

Betrachtet man außerdem die  $x^i$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$  für jedes  $i$  als Unbekannte, so liegt ein lineares inhomogenes ( $a_0 \neq 0$ ) Gleichungssystem vor. Die Unbekannten könnte man mit Hilfe der Cramerschen Regel exakt berechnen, wenn man unendlich viele Gleichungen angeben könnte. Fürstenau spricht von "unendlichen Determinanten", welche zur Berechnung zur Verfügung stehen. Man muß sich für die allein mögliche Näherungsberechnung auf endliche Determinanten beschränken.  $x$  ergibt sich dann als Quotient zweier Determinanten:

$$= x^1 = x = -a_0 \frac{P}{R}.$$

Dabei ist  $R$  die Determinante der Koeffizientenmatrix, wobei man sich bewußt ist, daß hier nur endliche Determinanten stehen, von denen man annimmt, sie würden die tatsächlichen Verhältnisse approximieren.

$$R = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1 & 0 & \dots \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1 & 0 & \dots \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} & 1 & 0 & \dots \\ 0 & a_0 & \dots & & & & & & \\ \dots & & & & & & & & \end{vmatrix}.$$

$a_0 P$  entsteht durch Ersetzen der ersten Spalte von  $R$  mit den Absolutgliedern des Systems, die alle bis auf  $a_0$  identisch Null sind, und  $P$  somit aus  $R$  nur durch Weglassen der ersten Spalte und der ersten Zeile gewonnen wird.  $P$  ist also eine Determinante der nächst niedrigeren Ordnung (Endlichkeit ist vorausgesetzt). Setzt man  $R = R_p$  und  $P = R_{p-1}$ ,  $p = 0, 1, 2, \dots$ , so ist bekannt, daß  $R_{p_0}$  rekursiv aus sämtlichen  $R_p$  mit  $p < p_0$  linear aufgebaut wird, falls  $R_p$  eine quadratische,  $p$ -reihige Unterdeterminante ist und immer in der linken oberen Ecke der Ausgangsdeterminante steht, also  $p$  aufeinanderfolgende Zeilen und Spalten enthält. So gilt:

$$R_0 = 1$$

$$R_1 = a_1$$

$$R_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_0 & a_1 \end{vmatrix} = a_1^2 - a_0 a_2 = a_1 R_1 - a_0 a_2 R_0$$

$$R_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & a_0 & a_1 \end{vmatrix} = a_1^3 + a_3 a_0^2 - 2 a_0 a_1 a_2 = \\ a_1 R_2 - a_0 a_2 R_1 + a_0^2 a_3 R_0$$

usw.

offensichtlich stimmt das oben aufgestellte Bildungsgesetz für  $P$  (Weglassen der ersten Spalte und Zeile) damit überein, daß  $P = R_{p-1}$  aus  $R_p$  durch Weglassen der letzten Zeile und Spalte entsteht.

Fürstenau zeigt unter Zurückführung auf Potenzsummen der Wurzeln, daß durch

$$-a_0 \frac{R_{p-1}}{R_p}$$

für  $p \rightarrow \infty$ , die absolut kleinste Wurzel approximiert wird. Der Zusammenhang mit der Bernoullischen und der Gräffeschen Methode wird jedoch nicht erwähnt. Es wird das Verfahren noch für die übrigen einfachen Wurzeln ausgebaut und 1867 folgt eine Darstellung für komplexe und Mehrfachwurzeln [F 4].

Die fehlende Begründung dafür, daß die oben durchgeführten Operationen für den Unendlichfall zulässig sind, hat Fürstenau jedoch nicht gegeben, sondern erst die Untersuchungen Schröders [S 5; 347], der auf anderem Weg zu seiner Auflösungsformel gelangte, in welcher der von Fürstenau gegebene als Spezialfall enthalten ist, haben hier Gewissheit gebracht. Die Art und Weise der Annäherung wurde von Günther gezeigt, indem er die Identität gewisser aus den Koeffizienten gebildeter unendlicher Kettenbrüche mit dem Quotienten zweier unendlicher Determinanten gezeigt hat. Daraus geht hervor, daß die Näherungswurzel zwischen zwei aufeinanderfolgenden Quotienten

$$-a_0 \frac{R_{p-1}}{R_p} \quad \text{und} \quad -a_0 \frac{R_p}{R_{p+1}} \quad \text{liegt [G 8].}$$

Aufschlußreich im Hinblick auf die fortschreitende Abkehr von der Praxis und Hinwendung zur theoretischen Durchdringung von Näherungsmethoden ist die Schlußbemerkung von Fürstenau, in der er darauf hinweist, "keineswegs aber eine neue Methode zur praktischen numerischen Berechnung der Wurzeln aufzustellen," sondern "einen Beitrag zur Kenntnis der allgemeinen Eigenschaften der algebraischen Gleichungen zu liefern". Die Determinantenmethode wird aber 1918 bei Whittaker wieder verwendet [W 6; 120 - 123], wobei darauf verwiesen wird, daß bereits Wronski 1811 der Zusammenhang zwischen Potenzsummen der Wurzeln und Determinanten der Koeffizienten bekannt war.

Diesen Zusammenhang erkennt man so:

Es seien  $x_1, x_2, \dots, x_n$  die Wurzeln im Polynom  $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ .

$$\begin{aligned} \text{Berechnet man } \frac{a_0}{f(x)} &= \frac{1}{\prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{x}{x_i}\right)} = \left(1 + \frac{x}{x_1} + \frac{x^2}{x_1^2} + \dots\right) \dots \left(1 + \frac{x}{x_n} + \frac{x^2}{x_n^2} + \dots\right) \\ &= 1 + Q_1 x + Q_2 x^2 + Q_3 x^3 + \dots, \end{aligned}$$

wobei die  $Q_i$  Summen aus Potenzen und gemischten Produkten der Reziproken der Wurzeln darstellen. Nun gilt aber

$$a_0 = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n)(1 + Q_1 x + Q_2 x^2 + \dots),$$

und ein Koeffizientenvergleich liefert

$$0 = a_1 + a_0 Q_1 \implies Q_1 = -\frac{a_1}{a_0}$$

$$0 = a_2 + a_1 Q_1 + a_0 Q_2 \implies Q_2 = -\frac{a_2}{a_0} + \frac{a_1^2}{a_0^2} = \frac{1}{a_0^2} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_0 & a_1 \end{vmatrix}$$

$$0 = a_3 + a_2 Q_1 + a_1 Q_2 + a_0 Q_3 \implies$$

$$Q_3 = -\frac{1}{a_0^3} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & a_0 & a_1 \end{vmatrix}$$

Daraus kann man sofort entnehmen (vgl. S. 101):  $R_n = (-a_0)^n Q_n$ .

Nebenbei stellt man fest, daß die Art der Annäherung der bei Bernoulli entspricht. Man kann nämlich aufgrund einer Regel von Jacobi für bestimmte Unterdeterminanten zeigen, daß

$$\frac{Q_p}{Q_{p+1}} = -a_0 \frac{\begin{vmatrix} a_1 & \dots & a_p \\ a_0 & \dots & a_1 \\ 0 & \dots & a_0 & a_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & \dots & a_p & a_{p+1} \\ a_0 & \dots & a_1 \\ 0 & \dots & 0 & a_0 & a_1 \end{vmatrix}} = -a_0 \frac{R_p}{R_{p+1}}.$$

Wenn (o.E.)  $x_1$  maximalen Betrag unter den Wurzeln von  $f(x)$  hat, kann man sich überlegen, daß unter Berücksichtigung der Einschränkungen für mehrfache und komplexe Wurzeln

$$\frac{Q_p}{Q_{p+1}} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \frac{x_1^p}{x_1^{p+1}} = x_1 \quad \text{strebt.}$$

Mit den Ausführungen Schröders ist die Theorie über Näherungsmethoden zu einem gewissen Abschluß gekommen, die dann im 20. Jh. mit den Möglichkeiten von Rechenautomaten erst richtig zum Tragen kamen. Seine Abhandlung [5] beginnt mit folgenden Worten :

" Das vielbehandelte Problem der Auflösung einer Gleichung wird im Folgenden aus einem, meines Wissens, neuen Gesichtspunkte in Angriff genommen, welcher die gemeinschaftliche Quelle sowohl für mehrere bekannte , als auch für unzählige noch nicht beachtete Lösungsmethoden bildet. Die Untersuchungen beziehen sich nicht nur auf algebraische, sondern auch auf transzendente Gleichungen mit einer Unbekannten. Anregung zu denselben erhielt ich 1867 durch einige Mitteilungen von Herrn Dr. Heinrich Eggers aus Mecklenburg ... " ( Von Eggers sind unmittelbar hierzu keine Veröffentlichungen bekannt ).

Schröder greift das Problem erstmanl von der Seite auf, bei der nicht von einem bestimmten Gleichungstyp ausgegangen wird, um daraus durch geeignete Umformungen zu einer Näherungsgleichung zu gelangen, sondern stellt an ein noch unbekanntes Verfahren , dem dann die Umformung unterworfen wird, ganz bestimmte Forderungen.

"Es handelt sich darum, eine solche Funktion  $F$  aufzufinden, daß die Gleichung

$$z' = F(z)$$

stets einen Punkt  $z'$  liefert, welcher der Wurzel  $z_1$  näher liegt als der anfänglich genommene Punkt  $z$  . . .

... definieren wir überhaupt :

$$z^{(r)} = F(z^{(r-1)}) ,$$

so wird die Distanz des letzten Punktes  $z^{(r)}$  von der Wurzel  $z_1$  nach der über  $F$  gemachten Annahme kleiner sein, als die eines jeden der vorgegebenen Punkte :

$z^{(0)} = z$ ,  $z^{(1)} = z'$ ,  $z^{(2)} = z''$ , ...,  $z^{(r-1)}$  von der nämlichen Wurzel;"

"Eine fernere Forderung, die an die Funktion  $F$  gestellt werden muß, ist aber noch die, daß ...

$$\lim_{r \rightarrow \infty} z^{(r)} = z_1$$

werde" [S 5; 318 f].

Schröder zeigt, daß wenn man sich auf einwertige Funktionen beschränkt, diese letzte Bedingung und

$$|z^{(r)} - z_1| < |z^{(r-1)} - z_1|$$

ersetzt werden können durch

$$(1) \quad F(z_1) = z_1 \quad \text{und}$$

$$(2) \quad |F'(z_1)| < 1,$$

sod daß er folgenden Satz angeben kann [S 5; 322]:

Ist  $F(z)$  eine um den Punkt  $z_1$  herum einwertige Funktion, welche den Bedingungen (1) und (2) genügt, so kann man immer eine übrigens willkürliche Zahl  $z$  nahe genug an  $z_1$  annehmen, damit die Gleichung

$$z_1 = \lim_{r \rightarrow \infty} F(z^{(r)})$$

erfüllt werde; mit anderen Worten, für alle Punkte  $z$  eines gewissen, um den Punkt  $z_1$  herumliegenden Gebietes, strebt die ohne Ende fort iterierte Funktion  $F(z)$  der Wurzel  $z_1$  der Gleichung  $F(z) = z$  als Grenze zu.

Hierdurch kommt erstmal das Prinzip der funktionalen Iteration zum Ausdruck (vgl. [S 1; 9 f]).

Es wird eine Abbildung des Lösungsraumes konstruiert, deren Lösungen die Fixpunkte sind. Man bestimmt nun die Fixpunkte durch iterierte Abbildung eines willkürlichen Ausgangselementes. Abgesehen von der Terminologie hat Schröder das erste Mal einen einfachen Fixpunktsatz in die Überlegungen in Bezug auf Näherungsmethoden aufgenommen. Der einfachste Fixpunktsatz lautet:

Ist  $F$  eine Funktion mit  $|F'(z)| \leq K < 1$  in einem Intervall  $I$  des Zahlenstrahles, und ist  $F(z) \in I$  für  $z \in I$ , so besitzt  $F$  in  $I$  genau einen Fixpunkt  $z_1$  und dieser wird als

$$\lim_{r \rightarrow \infty} z^{(r)} = z_1$$

erhalten, wenn  $z^{(0)} \in I$  beliebig und  $z^{(r+1)} = F(z^{(r)})$  ist.

Heute weiß man, daß diese Methode der Iteration in den verschiedensten Gebieten anwendbar ist, z.B. zur Lösung linearer Gleichungssysteme, bei Differentialgleichungen und bei Näherungslösungen nichtlinearer Gleichungen. Der Grundgedanke des Verfahrens ist folgende Verallgemeinerung eines Fixpunktsatzes:

Jede Kontraktion in einem vollständigen metrischen Raum, z.B.  $\mathbb{R}$ , hat genau einen Fixpunkt.

Dabei heißt eine Abbildung  $F$  eines metrischen Raumes  $M$  mit der Abstandsfunktion  $d$  in sich eine Kontraktion, wenn es eine Zahl  $k < 1$  so gibt, daß

$$d(F(z), F(y)) \leq k d(z, y)$$

für alle  $z, y \in M$  gilt.

Nach dem polnischen Mathematiker Stephan Banach, der dieses Prinzip als erster so allgemein formuliert hat, wird es auch "Banachscher Fixpunktsatz" genannt.

## X Zusammenfassung

Um algebraische Gleichungen der Form  $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$  näherungsweise zu lösen, stehen eine Vielzahl von Methoden zur Verfügung, welche

fast alle einen sehr lang zurückliegenden Anfang haben. Nicht wenige sind in Vergessenheit geraten, weil sie durch effektivere abgelöst wurden. Die vorgestellten Verfahren lassen sich unter wenigen, zum Teil noch historisch begründeten, übergeordneten Gesichtspunkten zusammenfassen, nämlich:

1. Nullpunktverschiebung, ausgehend von den Methoden des Radizierens, mit dem Newton - Verfahren als wichtigsten Vertreter und dem Horner - Schema als Hilfsmittel,
2. lineare Interpolation, ausgehend vom "Falschen Ansatz",
3. Intervallschachtelung, die aus den schon genannten Verfahren entwickelt, aber auch rein probierend gefunden werden kann,
4. Prinzip der Iteration, das zwar den obigen Methoden wesentlich zugrundeliegt, aber historisch bei bestimmten Gleichungsformen eine eigene Methode ist,
5. Methoden, welche sich auf die Berechnung von Potenzen aller Wurzeln stützen.

(Tatsächlich hat Schröder [S 5] 1869 erkannt, daß sich die wichtigsten bis dahin bekannten Verfahren auf zwei Grundtypen zurückführen lassen, welche sich nur durch ihr Konvergenzverhalten unterscheiden.)

Für Anfangswerte der Verfahren 1. - 4. bedarf es häufig einer dem Näherungsprozess vorausgeschickten Untersuchung über die Anzahl und Art der Wurzeln und über die Eingrenzungen. Hier werden zwei Prinzipien vorgestellt: das Differenzenschema und die Zeichenregel von Descartes, mit ihrer Fortentwicklung bis hin zur Sturmschen Kette.

Bei den Babyloniern (ca. 1800 v.Ch.) und z.T. auch noch im Abendland des 16.Jh., löste man auch lineare Gleichungen durch Versuchszahlen, anstatt die Gleichung algebraisch aufzulösen, d.h. die Lösung durch die Koeffizienten auszudrücken.

Quadratische Gleichungen konnte man ebenfalls seit den Babyloniern durch quadratische Ergänzung lösen, so daß Näherungsverfahren nur für Wurzeln gebraucht wurden. Bis zu Beginn des 16. Jh. allgemeine kubische Gleichungen aufgelöst werden konnten (bekannt gemacht durch Cardano [C 6]), benötigte man auch hierfür Approximationsmethoden. Dasselbe gilt für biquadratische Gleichungen, deren algebraische Auflösung ebenfalls erst im 16. Jh. gelang (Ferrari 1544). Der Beweis der Nichtauflösbarkeit von Gleichungen höheren als vierten Grades durch Ruffini (1799), Abel (1824) und Galois (1829) und der Erkenntnisse, daß Wurzeln irrational sein können, hatte auf die Entwicklung von Näherungsmethoden keinen Einfluß, weil es oft bequemer ist, auch schon für kubische oder biquadratische Gleichungen numerische Methoden zu benutzen.

Im historischen Verlauf machen sich drei besonders markante Einschnitte bemerkbar:

1. die Anwendung des doppelten falschen Ansatzes auf Gleichungen höheren Grades durch Cardano (1545) (s.S. 11),
2. die Ausweitung der Radiziermethode mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes auf allgemeine algebraische Gleichungen durch Viète (1600) (s.S. 17), und
3. die Methode von Bernoulli, mit Hilfe von Potenzsummen der Wurzeln.

Vor Cardano kannte man das Radizieren. Bei den frühen Chinesen und den Arabern des Mittelalters bediente man sich dabei des Horner - Schemas; den Arabern war darüber hinaus noch die seit den Babyloniern bekannte Näherung

$$\sqrt{N} = \sqrt{a^2 + r} = a + \frac{r}{2a}$$

mit verschiedenen Abwandlungen geläufig. Von den Chinesen kennt man auch Beispiele, wo mehrgliedrige algebraische Gleichungen mit Hilfe des Horner - Schemas gelöst werden. Dies ist besonders bemerkenswert, als letztlich das Newton - Verfahren zugrunde liegt. Sehr früh in der Geschichte (9. Jh. in Bagdad) werden Iterationsverfahren angewandt, welche sich aus Gleichungen des Typs

$$x = g(x)$$

ergeben. Daneben treten immer wieder Verfahren auf, welche sich nicht ohne weiteres einordnen lassen (z.B. al - Bīrūnī, Leonardo von Pisa).

Auf Cardano geht unsere Lineare Interpolation ( regula falsi ) für nicht-lineare Gleichungen zurück. Dies war das erste brauchbare, im Abendland bekannte Verfahren. Mit François Viète begann ein neuer Abschnitt, der durch die von ihm geschaffene Möglichkeit, wenn auch so nicht ausgesprochen, durch Nullpunktverschiebung eine Gleichungslösung zu berechnen, den Weg für das Newton - Verfahren bereitete.

Das Ausnützen von Potenzsummen der Gleichungswurzeln zu Anfang des 18. Jh. ( Bernoulli ) brachte schließlich ein völlig neues Näherungsprinzip, das unabhängig von Versuchslösungen die Nullstellen zu approximieren gestattet. Der wichtigste Vertreter dieses Typs ist das Verfahren von Gräffe.

Das 19. Jh. ist gekennzeichnet durch den Ausbau der bekannten Methoden und die Bestrebungen alle Verfahren unter einem einheitlichen theoretischen Aspekt zusammenzufassen. Dabei ragen zwei Arbeiten besonders heraus: Fouriers "Analyse des Equations Déterminées", in der für das Newton - Raphson - Verfahren wichtige Konvergenzkriterien aufgestellt werden, und ein Separationsverfahren die Möglichkeit bietet, erste Näherungen zu finden [F 1], und Schröders Abhandlung "Über unendlich viele Algorithmen zur Auflösung der Gleichungen", in der die Zurückführung aller Näherungsverfahren auf zwei Grundprinzipien angestrebt wird. Außerdem hat Schröder als erster einen Fixpunktsatz für Näherungsmethoden aufgestellt. Daraus lassen sich Konvergenzbedingungen für eine Iteration ableiten [S 5]. Sowohl Schröder, als auch Fourier haben gezielt nach der theoretischen Absicherung gefragt und nach der Wirksamkeit verschiedener Methoden, und sie haben damit eine Theorie der Näherungsmethoden geschaffen.

Schon in frühester Zeit werden auch transzendente Gleichungen approximativ gelöst. So bei den Babyloniern, welche mit Hilfe des falschen Ansatzes eine Gleichung lösten, die man als eine Exponentialgleichung interpretieren kann. Weitاًus wichtiger war aber die Auflösung der nach Kepler benannten, aber schon bei den Arabern bekannten Gleichung für die Bewegung von Himmelskörpern:

$$t = x - m \sin x .$$

Es mußte  $x$  bei gegebenem  $m$  und festem  $t$  berechnet werden, wobei vermutlich erstmals ein Iterationsverfahren der Form

$$x_n = t + m \sin x_{n-1} = g(x_{n-1})$$

zur Anwendung kam.

Bei Näherungsverfahren gibt es zwei verschiedene Anforderungen an die Ergebnisse. Entweder ist ein Näherungswert, von dem man weiß, welcher Gleichung er genügen soll, z.B. durch Messungen bekannt und soll verbessert werden, oder es kommt nur darauf an, rasch alle Wurzeln ungefähr zu kennen. Diese beiden Erfordernisse traten auch früher schon auf. Jedoch kam es immer darauf an, möglichst wenige, unter Umständen sogar verschiedene Rechenschritte vornehmen zu müssen. Bei modernen Rechenanlagen liegt das Hauptgewicht auf der Gleichheit der Schritte, also die Iterierbarkeit eines Verfahrens; die Anzahl der Schritte ist unerheblich. Dafür tritt aber ein neues Problem auf. Wenn man nur drei oder vier Rechenschritte durchzuführen hat, kann man leicht kontrollieren, wie sich ein Fehler beim ersten Schritt auswirkt. Sobald aber sehr viele Iterationen durchgeführt werden, muß man über die Fehlerentwicklung genau Bescheid wissen. Deshalb werden Fehlerrechnungen, von wenigen Ausnahmen abgesehen (z.B. bei Lagrange, s.S. 47) nicht durchgeführt.

An manchen Stellen der vorliegenden Arbeit wird hervorgehoben, daß man gleiche Verfahren in verschiedenen Epochen oder Kulturkreisen entdeckt und angewandt hat. Dafür können nur gelegentlich Gründe genannt werden. Bruins [B 7] hat in einem Aufsatz gerade auch Näherungsverfahren als Beleg dafür angesehen, daß sogar in gleichen Epochen unabhängig voneinander Entdeckungen und Wiederentdeckungen vorkommen, also die Situation und die Probleme, vor denen eine Wissenschaft steht, ganz ähnliche Forschungsergebnisse veranlassen.

## X I Literaturverzeichnis

- A 1 Aaboe, Asgar, Al - Kāshī's Method for the Determination of  $\sin 1^\circ$   
Scripta Math. 20, 1954, S. 24 - 29
- 2 Adams, J.C., On Newton's Solution of Kepler's Problem  
Monthly Notices of the Roy. Astr. Soc. London, vol 43, 1882, S. 43 - 49
- 3 Al - Bīrūnī, Die trigonometrischen Lehren des persischen Astronomen  
Abu'l - Raihān Muhammed Ibn Aḥmad Al-Bīrūnī  
ed. Carl Schoy, Hannover 1927
- 4 ders., Izbrannye proizvedeniya, (Ausgewählte Werke, russ. aus dem  
Arabischen übers. und bearb. von Bulkakow und Rosenfeld'd) Bd 5, T. 1
- 5 al - Kāšī, siehe Aaboe, Luckey, Hankel, Juschkewitsch
- B 1 Bauer, F.L., Quadratisch konvergente Durchführung der Bernoulli-  
Jacobischen Methode zur Nullstellenbestimmung von Polynomen,  
Sitz. Ber. Bay. Akad. Wiss., München 1954, S. 275 - 303
- 2 Bellavitis, Giusto, Determinazione delle radici reali e immaginarie  
delle equazioni algebriche  
Mem. dell Istituto I.R. Veneto, T. III, 1847, S. 109 - 219
- 3 Bernoulli, Daniel, Observationes de seriebus recurrentibus,  
Comm. Acad. Sc. Petersburg, 3, 1728 (1732), S.85 - 100
- 4 Bernoulli, Nikolaus I, siehe [S 2]
- 5 Bialas, Volker, List, Martha, Die Coss von Jost Bürgi in der Redak-  
tion von Johannes Kepler,  
Abh. Bay. Akad. Wiss., math.-nat. Klasse, Neue Folge Heft 154, 1973  
München
- 6 Brodetsky, S. und Smeal, G., On Graeffes method for complex  
roots of algebraic equations,  
Proc. Cambr. Phil.Soc. 22, 1924, S. 83 - 87
- 7 Bruins, Everet, M. On the History of Approximativ Computation  
Janus, LX, 1-2-3, S. 199 - 206, 1973
- 8 Budan du Boislaurent, F.D., Nouvelle Méthode pour la Résolu-  
tion des Equations Numériques,  
Paris 1807, Nachdruck 1822 mit einem Anhang
- 9 Bürgi, Jost, siehe [B 5] und [W 7]

- C 1 **Cajori, Florian**, A History of the Arithmetical Methodes of Approximation to the Roots of Numerical Equations of one Unknown Quantity  
Colorado College Publications 51, Vol XII, 7, Oct. 1910
  - 2 **ders.**, Fouriers Improvement of the Newton - Raphson Method of approximations anticipated by Mourraille,  
Bibl. Math. 311, 1910 - 1911, S. 132
  - 3 **ders.**, Horners Method of Approximation ...  
Bull. Amer. Math. Soc, 17 (2) , 1910 - 1911
  - 4 **ders.**, The Principle Works of William Oughtred,  
Chicago 1916
  - 5 **ders.**, On Michel Rolle's Book " Méthode pour résoudre les égalitez" and the History of " Rolle's theorem"  
Bibl. Math. 311, 1910 - 1911
  - 6 **Cardano, Geronimo**, Ars magna sive de regulis algebraicis,  
Nürnberg, 1545, in: Opera omnia, ed. A.Buck, Vol IV, New York 1967
  - 7 **Cataldi, Pietro Antonio**, Trattato del modo brevissimo di trovare la radice quadra delli numeri,  
Bologna 1613
  - 8 **Cauchy, Augustin L.**, Leçons sur le calcul différentiel,  
übers. Schnuse, Braunschweig 1836
  - 9 **Chuquet, Nicolas**, Le triparty en la science des nombres,  
1484, in : Bulletino Boncompagni, 13/14, 1880/81
  - 10 **Collatz, L.** Das Hornersche Schema bei komplexen Wurzeln algebraischer Gleichungen,  
Zs. angew. Math. u. Mech. 20, 1940, S. 235 - 236
  - 11 **Collins, John**, An Account Concerning the Resolution of Equations in Numbers  
Phil. Trans. 1669, Vol IV, S. 929 - 934
- D 1 **Dandelin, Gérminal Pierre**, Recherche sur la Résolution des Equations Numériques  
Nouv. Mém. Acad. Roy. Brüssel T 3, 1826, S. 7 - 71
  - 2 **Dechaies, Claude François Millet**, Cours seu mundus mathematicus  
Paris 1674, 21690
  - 3 **Datta B.u. Singh, A.N.**, History of Hindu Mathematics, I + II  
Bombay 1962
  - 4 **Descartes, René**, Géométrie ,  
Leiden 1637, ed. L. Schlesinger , Leipzig 1923

- E 1 Encke, J.F. Allgemeine Auflösung der numerischen Gleichungen  
Berliner Astr. Jahrbuch, 1841, S. 281 - 338
- 2 Eneström, Gustaf, Kleine Bemerkungen zur letzten Auflage von  
Cantors "Vorlesungen über Geschichte der Mathematik"  
Bibl. Math. 3<sup>11</sup>, S.233 - 275, 1910 - 1911
- 3 ders., Kleine Bemerkungen zur letzten Auflage von Cantors "Vorle-  
sungen über Geschichte der Mathematik"  
Bibl. Math. 3<sup>10</sup>, S. 80
- 4 ders., Kleine Bemerkungen zur letzten Auflage von Cantors "Vorle-  
sungen über Geschichte der Mathematik"  
Bibl. Math. 3<sup>7</sup> S. 293
- 5 Euler, Leonhard, Vollständige Anleitung zur Algebra,  
Petersburg, 1771, in: Werke Bd. I, Leipzig 1922
- 6 ders., Introductio in Analysin Infinitorum,  
Lausanne 1748, in: Werke Bd. 8, Leipzig 1922
- 7 ders., Institutiones calculi differentialis  
Petersburg 1755, in: Werke Bd.10, Leipzig, Berlin 1913
- 8 Eutokios von Askalon, Eutocci commentarii in libros de sphaere et  
cylindro,  
in: Archimedes, Opera omnia, ed. Heiberg Bd.III Stuttgart 1973
- 9 Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften  
Bd. 1, Leipzig 1899
- F 1 Fourier, Jean Baptiste Joseph, Analyse des Equations Déterminées,  
Paris 1831, übers. A.Loewy, Ostw.Klass. Nr 127, Leipzig 1902
- 2 ders., Question d'Analyse Algébrique,  
Bulletin des Sciences par la Société Philosophique, 1818, S. 61 - 67  
in: Werke Bd. II, S. 243, Paris 1890
- 3 Fürstenau, F., Darstellung der reellen Wurzeln algebraischer Glei-  
chungen durch Determinanten der Coefficienten,  
Marburg 1860
- 4 ders., Neue Methode zur Darstellung und Berechnung der imaginären  
Wurzeln algebraischer Gleichungen durch Determinanten der Coefficienten  
Marburg 1867

- G 1 Gauß, Carl Friedrich, Beiträge zur Theorie der algebraischen Gleichungen  
Werke Bd. 3, S 70 – 102, Leipzig Berlin 1883/1929
- 2 Gemma Frisius Rainer, Arithmeticae practicae methodus facilis  
um 1536, Wittenberg 1540
- 3 Girard, Albert, Invention nouvelle en l'algèbre,  
Amsterdam 1629, Nachdruck Leiden 1884
- 4 Glushkow, S., On Approximation Methods of Leonardo Fibonacci,  
Historia Mathematica Vol 3, August 1976 S. 291 – 196
- 5 Gräffe, Carl Heinrich, Die Auflösung der höheren numerischen  
Gleichungen, Zürich 1837
- 6 NN
- 7 Gua de Malves, J.P., Recherches du nombre des racines réelles ou  
imaginaires,  
Hist. Akad. Sc. Paris 1741 S. 72 – 96
- 8 Günther, Siegmund, Über die allgemeine Auflösung der Gleichungen  
durch Kettenbrüche  
Math. Annalen Bd. 7, 1875, S. 262 – 268
- 9 ders., Beiträge zur Erfindungsgeschichte der Kettenbrüche,  
Programm der Lateinschule zu Weissenberg 1872
- 10 Goldstine, H.H., A History of Numerical Analysis from the  
16th Through the 19th Century, New York 1977
- H 1 Haas, Karlheinz, Die mathematischen Arbeiten von Johann Hudde  
( 1628 – 1707 ) Bürgermeister von Amsterdam  
Centaurus 4, 1956, S. 235 – 284
- 2 Halley, Edmund, Methodus nova accurata et facilis inveniendi Radices...  
Phil. Trans. Vol 18, London 1694, S. 136 – 148
- 3 Harriot, Thomas, Artis analyticae praxis,  
London 1631, posthum
- 4 Hérigone, Pierre, Cursus mathematicus  
Paris 1634/37
- 5 Hartree, D.R., Numerical Analysis,  
Oxford, 1958
- 6 Hofmann, J.E. Eulers erste Reihenstudien  
in: Sammelband zum 250. Geburtstag Eulers, Berlin 1959, S. 139 – 208
- 7 ders., Geschichte der Mathematik  
Bde. I. – III., Berlin 1963

- 8 Horner, William George, A new Method of solving numerical equations of all orders, by continous approximation,  
Phil. Trans. Part 1, Bd. 109, London 1819
  - 9 Hudde, Johann, De Reductione Aequationum 1657  
siehe [H 1]
  - 10 Hume, James, Algèbre de Viète, d'une methode nouvelle, claire et facile  
Paris 1636
- I 1 Ingram, Alexander, Appendix zur Ausgabe von: Charles Hutton, Arithmetic, Edinburgh 1807
- J 1 Jacobi, Carl Gustav Jakob, Observatiunculæ at theoreman aequationum pertinentes,  
Crelles Journal, 13, 1835, S. 349
- 2 Juschkewitsch, A.P., Geschichte der Mathematik im Mittelalter  
Moskau 1961 ( russ.), Leipzig 1963 ( deutsch )
- K 1 Kennedy, E.S., Transue, W.R., A Medieval Iterativ Algorisme  
Amer. Math. Monthly 63, 1956, S. 80 - 83
- 2 Kennedy, E.S., An early Method of Successive Approximation  
Centaurus 13, 1969, S. 248 - 250
  - 3 Kepler, Johannes, Astronomia nova stellae Martis,  
1606, Werke Bd. III, München 1939
- L 1 Lagny, T.F., Méthodes nouvelles pour former et résoudre toutes les équations,  
Mém. Acad. Roy. Paris, Année 1705, S. 367 - 396
- 2 ders., Méthode nouvelle et abrégée pour l'extraction et l'approximation des racines, de toutes les égalités  
in: Méthode nouvelle pour l'extraction et approximation des racines  
Paris 1692, S. 49 - 63, 2. Auflage 1733
  - 3 Lagrange, Louis Joseph, Traité de la résolution des équation numériques de tous les degrés  
Paris 1798, Werke Bd. 8, Paris 1867/92
  - 4 ders., Sur la résolution des équations numériques,  
Hist. et Mém. Acad. Berlin 23, 1769, in: Werke Bd. 2, Paris 1867/92

- 5 d e r s . , Nouvelle méthode pour résoudre les équations littérales par le moyen des séries,  
Mém. Acad. Berlin 24, 1770, in: Werke Bd. 3, Paris 1867/92
  - 6 Legendre , Adrien Marie, Théorie des nombres,  
1808 Paris, 1. Teil, § 14, S. 145
  - 7 Leonardo von Pisa , Practica geometria,  
1220, in : Scritti II, ed. Boncompagni, Rom 1857/62
  - 8 Libbrecht , U. Chinese Mathematics in the Thirteenth Century, The Shu-shu chiu-chang of the Ch'in Chiu-shao  
Cambridge, Mass. 1973
  - 9 Libri , Guillaume, Histoire des Sciences Mathématiques en Italie  
Paris 1841 , Bd. 4
  - 10 Lill , E. Résolution graphique des équations numériques d'un degré quelconque à une inconnue,  
Compte Rend. hebdom. Sc. Acad. , Paris 65, 1867, S. 854 - 857
  - 11 Liu Hui , siehe Needham, Science and Civilisation in China, III,  
S. 127, Cambridge 1959
  - 12 Lobatschewsky , Nikolai Iwanowitsch, Algebra,  
Kasan 1834, Werke Bd. 4, ed. Kagan, Moskau 1948 ( russ. )
  - 13 Luckey , P., Die Ausziehung der n-ten Wurzel und der binomische Lehrsatz in der islamischen Mathematik  
Math. Ann. 120, 1947/49 S. 217 - 274
- M 1 Maclaurin , Colin, A Treatise of Algebra,  
London 1748
- 2 Mathiessen , L. Grundzüge der antiken und modernen Algebra der literalen Gleichungen,  
Leipzig 1896
  - 3 Meyer , F., Zur Auflösung der Gleichungen,  
Math. Ann. 33, 1889, S. 511 - 524
  - 4 Mikami , Yoshio, The Developement of Mathematics in China and Japan  
Leipzig 1913
  - 5 Mourraille , Joseph Raymond, Traité de la résolution des équation en générale, Marseille 1768

- N 1 Neugebauer, Otto, *Mathematische Keilschrifttexte*,  
Bd. II 1935, Bd. 1937, Berlin
- 2 Newton, Isaac, *De analysi per aequationis numero terminorum infinitas*,  
1669, in: *The Mathematical Papers of Isaac Newton*, Bd II, ed. Whiteside  
Cambridge 1968, S. 218 – 225
- 3 ders., *Arithmetica universalis*  
1707, in: *The Mathematical Papers of Isaac Newton*, Bd. I, ed. Whiteside  
Cambridge 1968, S. 517 – 520
- 4 ders., *Brief von Newton an Collins vom 20.6.1674*,  
in: *Correspondence of Scientific Men II*, ed. Rigaud, Briefnummer 256
- 5 ders., *Philosophiae naturalis principia mathematica*  
London 1687, ed. Samuel Horsley London 1779/85, Faksimilidruck  
Stuttgart 1964
- 6 siehe [N 5], in: *The Mathematical Papers of Isaac Newton*, Bd. VI,  
ed. Whiteside, Cambridge 1968
- 7 ders., *Mathematical Principles of Natural Philosophy and his System  
of the World*,  
übers. Andrew Motte, ergänzt: F. Cajori, Berkley 3<sup>1947</sup>
- 8 Needham, siehe [L 11]
- O 1 Oughtred, William, *Clavis mathematica*,  
London 1631 u.ß.
- P 1 Pappos von Alexandria, *Collectiones*, Buch VII, Lemm 8  
ed. Hultsch, Berlin 1876/78, Bd. 2
- 2 Pitiscus, Bartholomaeus, *Trigonometrie*,  
Frankfurt 1612
- R 1 Raphson, Joseph, *Analysis Aequationum Universalis, seu ad Aequa-  
tiones Algebraicas resolvendas Methodus Generalis et Expedita, ex Nova  
Infinitorum Serium Methodo Deducta et Demonstrata*  
London 1690 u.ß.
- 2 Rashed, Roshdi, *Résolution des Equations Numériques et Algèbre:  
Š'araf al-dīn al-Ṭūsī, Viète*,  
*Archive for Hist. of Ex. Sc.* Vol 12, Nr 3 1974, S. 244 – 290

- 3 Rolle, Michel, *Traité d'Algèbre*  
Paris 1690
- 4 Ruffini, Paolo, *Sopra la determinazione delle radici nelle equazioni numeriche di qualunque grado*,  
Modena 1804, ed. Werke Bd.2, ed Bartolotti, S. 281 – 404, Rom 1953
- 5 Rutherford, William, *Die vollständige Lösung numerischer Gleichungen bei welcher durch ein und dasselbe Verfahren sowohl die imaginären, als auch die reellen Wurzeln leicht bestimmt werden*,  
übers. August Wiegand, Halle 1849
- 6 Rutishauser, Heinz, *Der Quotienten – Differenzen – Algorithmus*,  
Zs. f. angew. Math. u. Physik, Vol 5, S. 233 – 251
- S 1 Samuelson, K., *Faktorisieren von Polynomen durch funktionale Iteration*  
Abh. Bay.Akad. Wiss, math.-nat. Klasse, 9. Folge. Heft 95, München 1959
- 2 Schoy, siehe Al-Bīrūnī [A 3]
- 3 Schneider, Ivo, *Der Mathematiker Abraham de Moivre*,  
Arch.f.Hist. of Ex.Sc. Vol 5, Nr. 3/4, 1968, S. 177 – 317
- 4 Schnuse, C.H., *Theorie und Auflösung der höheren algebraischen und transzendenten Gleichungen*,  
Braunschweig 1850
- 5 Schröder, Ernst, *Über unendlich viele Algorithmen zur Auflösung der Gleichungen*  
Math.Ann. Vol II, 1870, S. 317 – 365
- 6 Segner, Johann Andreas, *Methodus simplex et universalis, omnes omnium aequationum radices detegendi*,  
Novi Commentarii Acad. Sc. Petropolitanae Bd.7, 1758/59, S. 211 – 226
- 7 ders., *Démonstration de la règle de Descartes*  
Hist.Akad. Berlin, Année 1756, S. 292 – 299
- 8 Serret, J.A., *Cours d'Algèbre supérieure*  
übers. "Handbuch der höheren Algebra", I, II, Leipzig 1878
- 9 Shain, J., *The Method of Cascades*,  
The Amer. Math. Monthly, 44, 1937, S. 24 – 29
- 10 Stern, Moritz, *Theorie der Kettenbrüche und ihre Anwendung*,  
Journal f.d.reine u. angew. Math. (Crelle) Bd.10 u.11, 1834

- 11 ders., Über die Auflösung der transzendenten Gleichungen  
ebenda: 22, 1841, S. 1 – 62
  - 12 Stevin, Simon, Appendice Algébrique,  
1594, in: The Principle Works of Simon Stevin, ed. Struik, S. 740 – 745  
Amsterdam 1958
  - 13 Stiefel, E., Einführung in die numerische Mathematik,  
Stuttgart 1965
  - 14 Sturm, Charles, Abhandlung über die Auflösung der numerischen Gleichungen,  
Bulletin des Sciences par Férussac, Sec. 1, T II, 1829, und in Ostw. Klass.  
Nr 143, Leipzig 1904
  - 15 Suter, H., Die Abhandlung Quostā ben Luqās und zwei andere anonyme über die Rechnung mit zwei Fehlern und mit der angenommenen Zahl,  
Bibl.Math. 39, S. 111 – 122
- T 1 Taylor, Brook, An Attempt Toward the Improvement of the Method of Approximating in the Extraction of the Roots of Equations in Numbers,  
Phil.Trans. Vol 30, London 1717, S. 610 – 622
- 2 Trpfke, J. Geschichte der Elementarmathematik  
Bd. 3, Berlin 1937
  - 3 Tweedy, C., James Stirling, a Sketch of his Life and Works, along with his Scientific Correspondence,  
Oxford 1922
- V 1 Viète, François, De numerosa potestatum purarum, atque adfectarum ad exegesin resolutione tractatus,  
Paris 1600, ed. Frans Schooten, Leiden 1646
- 2 ders., De aequationum recognitione et emendatione tractatus duo,  
Paris 1615, ed. Schooten, Leiden 1646
  - 3 Vincent, Alexander J.H., Sur la Résolution des Equations numériques,  
Jour.d.Math.pures et appliquées (Liouville), 3, 1836, S. 341 – 372
  - 4 Vogel, Kurt, Chiu Chang Suan shu, Neun Bücher arithmetischer Technik,  
in: Ostwalds Klass., Neue Folge Bd. 4, Braunschweig 1968
  - 5 ders., Die Algebra der Ägypter des mittleren Reiches,  
in: Archeion 12 Nr .2, 1930

- W 1 Wallis, John, Treatise on Algebra  
Oxford 1685, lateinische Ausgabe 1693
- 2 Waring, Edward, Meditationes algebraicae  
Cambridge 1770
- 3 ders., Meditationes Analyticae  
Cambridge 1776, S. 311
- 4 ders., Miscellanea Analytica  
London 1762 und 1783
- 5 Weber, H. Algebra, Bd 1,  
Braunschweig 1895
- 6 Whittaker, R.T. und Robinson, G., The Calculus of Observation,  
London 1924
- 7 Wölfling, E. Mathematischer Bücherschatz,  
Abh. zur Geschichte der Mathematik, Heft 14, 1, 1903
- 8 Wolf, R., Jost Bürgi  
Wolf, Astronomische Mitteilungen 31 - 40, 1872 - 1876, S. 7 - 28
- 9 Wronski, Hoëné, Intrduction à la Philosophie des Mathématiques,  
Paris 1811
- Z 1 Zurmühl, R., Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker  
Berlin 1965
- 2 ders., Zum Gräffe - Verfahren und Horner - Schema bei komplexen  
Wurzeln,  
Zs. f. angew. Math. u. Physik, 30, 1950, S. 283 - 285

## Lebenslauf

|                      |                                                                                                                                                                          |
|----------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Geburtsdatum         | 22.12.1946                                                                                                                                                               |
| Geburtsort           | München                                                                                                                                                                  |
| Schulbildung         | Volksschule an der Führichstraße, München<br>September 1953 - Juli 1957<br>Maria - Theresia - Gymnasium, München<br>September 1957 - Juli 1967 (Abitur)                  |
| Studium              | Ludwig - Maximilians - Universität, München<br>Mathematik und Geographie<br>Sommer - Semester 1969 - Sommer - Semester 1975                                              |
| Abschlußprüfung      | Staatsexamen für Mathematik und Geographie im<br>höheren Lehramt<br>Frühjahr 1974                                                                                        |
| Berufliche Tätigkeit | Referendarausbildung von September 1975 - Juli 1977<br>in München<br>seit September 1977 als Studienrat zur Anstellung am<br>Werner - Heisenberg - Gymnasium in Garching |

Unterschleißheim, den 2. Juni 1978







